

الأستاذ الدكتور رشدي خليل

مقدمة في

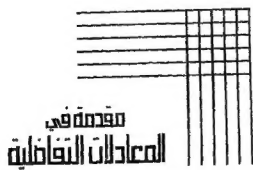
المعادلات التفاضلية

$$D = d/dx$$



اهداءات ٢٠٠٢

دار المناهج للنشر والتوزيع
سلطنة عمان



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

إهداء

إلى زوجتي أم بلال

وابنتي رقيه وأبناي بلال وأسامة وعبد الرحمن

رقم الإيداع لدى دائرة المكبات ١٠٣٧/٧/١٩٩٧

رقم الإجازة المتسلسل ٨٦٣/٧/١٩٩٧

مقدمة في المعادلات التفاضلية

تأليف
الأستاذ الدكتور رُشدي خليل



حقوق الطبع محفوظة

الطبعة الثانية

٢٠٠١م



دار المنجم
للطباعة والنشر

تلفون ٦٥٠٦٢٤ فاكس ٦٥٠٦٢٤
ص ب ٢١٥٣٠٨ عمان ١١١٢٢ الاردن

المحتويات

٩ المقدمة
١١ الترحيب (قصيدة للمؤلف)
	I- الوحدة الأولى
١٣ (Basics of linear algebra) أساسيات الجبر الخطي
١٥ (Vector spaces) 1- المتجهات الفضائية
١٨ (Span and independence) 2- التوليد والاستقلال
٢٤ (Basis and dimension) 3- الأساس والبعد
٢٧ (Matrices and determination) 4- المصفوفات والمحددات
٣١ (Eigen values) 5- القيم الذاتية
	II- الوحدة الثانية
٣٥ المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الأولى
	(First order differential equation)
٣٧ (Introduction) 1- مقدمة
٤٠ (Solution) 2- حل المعادلات التفاضلية
٤٣ (Initial conditions) 3- وجود الحل والشروط الأولية
٤٥ (Separation of variables) 4- طريقة فصل المتغيرات
٤٨ (Homogeneous equations) 5- المعادلات المتجانسة
٥٢ (Exact equations) 6- المعادلات المضبوطة
٥٧ (Integrating factor) 7- عامل التكامل
٦٢ (Linear coefficients) 8- المعاملات الخطية
٦٦ (Reduction of order) 9- اختزال المرتبة
	III- الوحدة الثالثة
٦٩ المعادلات التفاضلية الخطية
	(Linear differential equations)
٧١ (Definition) 1- التعريف
٧٤ (Solution) 2- حل المعادلات الخطية
٧٧ (First order linear differential equations) 3- المعادلات الخطية من المرتبة الأولى
٨٠ (Bernoulli equation) 4- معادلة برنولي
٨٣ (Second order linear differential equations) 5- المعادلات الخطية من المرتبة الثانية
٨٨ (Polynomials in D) 6- حدوديات مؤثر التفاضل

IV - الوحدة الرابعة

٩٥ المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة
(Second order linear differential equations with constant coefficients)

- ٩٧ 1- المعادلات المتجانسة (Homogeneous equations)
- ١٠١ 2- حالة الجذور حقيقية ومكررة (Repeated real roots)
- ١٠٣ 3- حالة الجذور المركبة (Complex roots)
- ١٠٦ 4- الحلول الخاصة (مبدأ التراكب) (Particular solutions)
- ١٠٩ 5- المعاملات غير المعينة (Undetermined coefficient)
- ١١٦ 6- طريقة تغير الوسطاء (Variation of parameters)

V - الوحدة الخامسة

١٢١ المعادلات الخطية من المراتب العليا
(Higher order linear differential equations)

- ١٢٣ 1- ملاحظات عامة (General remarks)
- ١٢٥ 2- إيجاد الحلول المتجانسة (Homogeneous solutions)
- ١٢٨ 3- العوامل غير المعينة (Undetermined coefficient)
- ١٣١ 4- طريقة تغير الوسطاء (Variation of parameters)
- ١٣٤ 5- معادلة أويلر (Euler equation)
- ١٣٩ 6- المقضي والحل الخاص (Annihilator)

VI - الوحدة السادسة

١٤٧ تحويل لابلاس (Laplace transform)

- ١٤٩ 1- تعريف (Definition)
- ١٥٦ 2- خصائص أساسية لتحويل لابلاس (Fundamental properties)
- ١٦٠ 3- تحويل لابلاس على المشتقات والتكاملات (Laplace of derivatives and integrals)
- ١٦٤ 4- لابلاس وضرب الاكترانات (Laplace of the product)
- ١٦٩ 5- نظير لابلاس (Laplace inverse)
- ١٧٤ 6- لابلاس والمعادلات التفاضلية (Laplace and differential equations)
- ١٨٠ 7- لابلاس والاكترانات الخاصة (Special functions)
- ١٨٧ 8- التلاف (Convolution)

VII - الوحدة السابعة

١٩٧ الحل بالمتسلسلات (Series solution)

- ١٩٩ 1- معلومات عامة (General informations)
- ٢٠٣ 2- الحل بمتسلسلة تيلر (Taylor series method)

٢٠٦	3- النقاط الطبيعية والمتفردة للمعادلات التفاضلية (Ordinary and singular Points).
٢١١	4- الحل حول النقاط العادية (Solution around ordinary points)....
٢١٨	5- معادلة الدلالة عند النقطة المتفردة (Indicial equation).....
٢٢٢	6- الحل عند النقطة المتفردة النظامية - طريقة فروبينس (Solution around regular singular point-Frobenius method)
٢٢٩	7- الحل العام عند النقطة المتفردة النظامية (General solution).....
٢٣٥	8- معادلات متميزة (Special equations).....
	VII- الوحدة الثامنة
٢٣٩	منظومة معادلات تفاضلية خطية (Systems of linear differential equations)
٢٤١	1- تعريف المنظومة (The difinition).....
٢٤٤	2- الأهمية ووجود الحل لمنظومة المرتبة الأولى (Existence of solution).....
٢٥٠	3- حل منظومات المرتبة الأولى ذات العوامل الثابتة..... (Solution of first order systems with constant coeficients)
٢٥٤	4- الحل والقيم الذاتية (Solution and eigen values).....
٢٦٠	5- حالة القيم الذاتية مركبة مختلفة (Distinct complex roots).....
٢٦٥	6- حالة التكرار (Repeated eigen values).....
٢٧٣	7- المنظومات غير المتجانسة (Non-homogenous systems).....
	IX- الوحدة التاسعة
٢٨١	تطبيقات للمعادلات (Applications of differential equations).....
٢٨٣	1- تطبيقات معادلات المرتبة الأولى..... (Applications of first order differential equations)
٢٨٩	2- تطبيقات المعادلات الخطية من المرتبة الأولى..... (Applications of first order linear differential equations)
٢٩٤	3- تطبيقات للمعادلات الخطية من المراتب العليا..... (Applications of higher order linear equations)
٢٩٧	4- تطبيقات منظومات المعادلات الخطية..... (Applications of systems of linear differential equations)
٣٠١	الاجوبة.....

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

الرياضيات هي عصب العلوم النشط . ومن أهم أفرع الرياضيات التي تظهر جليا في أفرع العلوم والمهندسة هي المعادلات التفاضلية . وفي هذا الكتاب توخينا ان نضع كل ما يلزم لاول مادة تدرس في الجامعة في موضوع المعادلات التفاضلية.

ولعل التميز في الكتاب ليست المادة بعد ذاتها . اذ ان هذه المادة متفق (أو شبه متفق) عليها في جامعات العالم . لكن التميز فيه هو الصياغة اللغوية التي حرصنا على ان تؤدي وظيفتها وغايتها على أكمل وجه . لمة تعمل مادة علمية ولكن بأسلوب أدبي، يجعل الطالب في عالمنا العربي يعيش قسلا علم مجرد أكسبته اللغة العربية حضرة مروجة بدي.

ومرة أخرى نقول ان الكتاب الاجنبي سيطر على سوقنا العلمي ردحا من الزمن لضعف المنافس . ولقد آن للغة العربية ان تصوغ الكتاب العلمي بما يكفل زحزحة الكتاب الاجنبي عن مساحات استولى عليها في فترة من غفلة الأمة.

والله نسأل ان يتغير الواقع في أمتنا الى واقع أفضل.

المؤلف

التروحيب

شعر الأستاذ الدكتور رشدي خليل

معادلات يا أهلاً بلقياك

وبارك الله يوماً فيه ألقاك

لولاك فاضلة ما كان هندسة

ولا ضمحت عيون العلم لولاك

القلب يجحد إن مرّت به حقب

أما أنا أبداً ما كنت أنساك

الكل ينظر نحو الحل في شغف

تلك الثوابت ترى من مُحياك

الطالب الوقاد يبحث دائماً

عن عامل التكميل في إعلاك

مفصلة المتغيرات أم خطيّة

متحفّز لا بلاس كي يلقياك

قد خط فيك أيلر بصماته

ريكارث نادى طالباً نجواك

لكن بيسل للأمور معقداً

ما ظنّه أن هكذا فحواك

يا أخت حسيان وخالة حامب

هذي السلالة جيل من سواك

إنّا على الأبواب هيا فافتحي

باب الحلول أو أننا نتمسك



الوحدة الأولى

أساسيات الجبر الخطي

"Basics of linear algebra"

في حل المعادلات التفاضلية نتعرض لأمر خارج نطاق المعادلات التفاضلية
والقمة ضمن نطاق الجبر الخطي. هذا هو غاية هذه الوحدة: سندرس موضوعات في
الجبر الخطي مرتبطة بحل المعادلات التفاضلية. والجبر الخطي مادة مستقلة وغنية بذاتها. ومن
يدري فقد نصحبك في رحلة كتاب آخر عبر خطوط الجبر الخطي. لكننا سنكتفي في هذه
الوحدة بمرد بعض أفكاره الرئيسية اللازمة لنا في سفرنا عبر محيطات المعادلات التفاضلية.
ولن نقوم بعملية غوص في بحر الجبر الخطي ولسوف نبقى عند الطبقة الأولى من سطحه.

1- المتجهات الفضائية (Vector Spaces)

سنبدأ مباشرة بتعريف المتجه الفضائي.

تعريف 1.1: المتجه الفضائي هو مجموعة ما ونقول V وعليها عمليتان تحقق كل منهما

شروطا معينة على النحو التالي:

I- عملية الجمع ويرمز لها بالرمز $+$. وهي عملية على عناصر المجموعة V بحيث:

1- العملية متعلقة على V . بمعنى : لكل v_1, v_2 في V يكون $v_1 + v_2 \in V$.

2- لكل v_1, v_2 في V يكون $v_2 + v_1 = v_1 + v_2$ (الخاصية الإبدالية) .

3- لكل v_1, v_2, v_3 في V يكون $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$ (الخاصية التجميعية) .

4- هناك عنصر θ في V بحيث $v + \theta = \theta + v$ لكل v في V يسمى للعنصر θ العنصر المحايد للجمع.

5- لكل عنصر v في V هناك عنصر \hat{v} في V . بحيث $v + \hat{v} = \hat{v} + v = 0$. يسمى \hat{v} النظير الجمعي لـ v . وعادة نكتب $-v$ بدلا من \hat{v} .

II- ضرب الثوابت. هذه عملية ليس على عناصر V وإنما عملية بين عناصر V وعناصر R (مجموعة الأعداد الحقيقية) لو $(\mathcal{L}$ مجموعة الأعداد المركبة) بحيث :

1- لكل r في R و v في V يكون $rv \in V$.

2- لكل v_1, v_2 في V و r في R يكون $r(v_1 + v_2) = rv_1 + rv_2$.

3- لكل r, s في R و v في V يكون $r(sv) = s(rv)$.

4- لكل r, s في R و v في V يكون $(r+s)v = rv + sv$.

5- لكل v في V يكون $1v = v$.

ومن الأمثلة على ذلك (ونترك لك التحقق من صحة ما نقول) :

مثال (1): $V = R$ والميلتان هما عمليتا الجمع والضرب العاديتين على R .

مثال (2): نأخذ V لتكون مجموعة الاقترانات المتصلة على الفترة $[a, b]$ ، ورمز

لهذه المجموعة بالرمز $C[a, b]$. أما للميلتان فهي :

(i) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ لكل x في $[a, b]$ حيث $f(x) + g(x)$ هو

مجموع عددين حقيقيين.

$$(ii) \quad (r \cdot f)(x) = r \cdot f(x) \quad \text{لكل } x \in R.$$

مثال (3): نأخذ V لتكون مجموعة كل الحدوديات التي درجتها أقل أو يساوي n ، و r من نهذه المجموعة بالرمز P_n .

أما العمليات فهي الجمع والضرب كما في مثال (2).

ونتكفي بهذه الأمثلة الثلاث لننتقل إلى تعريف آخر.

تعريف 1.2: إذا كان V متجه فضائي و $W \subseteq V$ فإن W يسمى متجه فضائي جزئي إذا كان W مغلقاً تحت عملية الجمع وضرب التوابت.

ومن الأمثلة على ذلك :

$$(i) \quad P_n \text{ متجه فضائي جزئي من } C[a, b].$$

$$(ii) \quad P_2 \text{ متجه فضائي جزئي من } P_3.$$

والآن إلى بند جديد.

مسائل

الوحدة الأولى

بند-1

1- عين أي المجموعات التالية تشكل متجها فضائيا حقيقيا بالنسبة لعمليتي الجمع وضرب الثوابت الماديتين:

$$(a) V = \{ (0, y) : y \in \mathbf{R} \}.$$

$$(b) V = \{ (1, y) : y \in \mathbf{R} \}.$$

$$(c) V = \{ (x, y) : x \geq y, x, y \in \mathbf{R} \}$$

$$(d) V = \{ (x, x) : x \in \mathbf{R} \}.$$

2- برهن أن المجموعات التالية تشكل متجهات فضائية حقيقية بالنسبة لعمليتي الجمع وضرب الثوابت الماديتين:

$$(a) M_{2 \times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} : a_i \in \mathbf{R} \right\}$$

$$(b) C[a, b] = \{ f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R} : f \text{ متصل} \}$$

$$(c) V = \{ f \in C[a, b] : f(0) = f(1) \}$$

$$(d) P_n = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i : a_i \in \mathbf{R} \right\}$$

3- أي من المجموعات التالية تشكل متجهات فضائية جزئية من الفضاءات التي تحويها :

$$(a) W = \{ f \in C[a, b] : f(0) \cdot f(1) = 0 \}$$

$$(b) W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2} : a = -d \right\}$$

$$(c) W = \{ f \in P_n : f(0) \geq 0 \}$$

4- في أي متجه فضائي برهن أن $r \cdot \theta = \theta$ لكل $r \in \mathbf{R}$.

5- في أي متجه فضائي برهن أنه $r \cdot v = \theta$ فلن $v = \theta$ أو $r = 0$.

2- التوليد والاستقلال (Span And Independence)

موضوع التوليد والاستقلال من المواضيع الرئيسية في الجبر الخطي. لكننا سنكتفي ببعض التعريفات والأمثلة.

تعريف 2.1: ليكن V متجهاً فضائياً و v_1, \dots, v_n عناصر في V فإن المجموع $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ يسمى توافقاً خطياً حيث c_i في R لكل $1 \leq i \leq n$.

مثال (1): $f_1(x) = x^2 + 5x$ هو توافق خطي من العنصرين $f_1(x) = x^2$ و $f_2(x) = x$ في $C[0,1]$.

مثال (2): $2\sin(x) - \cos(x) + 3x^3$ هو توافق خطي من العناصر $f_1(x) = x^2$ ، $f_2(x) = \cos(x)$ و $f_3(x) = x^3$ في $C[0,1]$.

تعريف 2.2: إذا كانت $E = \{v_1, \dots, v_n\}$ مجموعة جزئية في المتجه الفضائي V ، فإن مولد E ونكتب $\text{span}(E)$ ، هو مجموعة كل التوافقات الخطية من عناصر E .

وعليه:

$$\text{span}(E) = \{c_1 v_1 + \dots + c_n v_n : c_i \in R\}$$

مثال (3): إذا كانت $E = \{1, x\}$ فإن :

$$\text{span}(E) = \{c_1 \cdot 1 + c_2 x : c_i \in R\}$$

وعليه فإن $\text{span}(E)$ هو P_1 .

مثال (4): إذا كانت $E = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ فإن

$$\begin{aligned} \text{span}(E) &= \{x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) : x, y, z \in R\} \\ &= \{(x, y, z) : x, y, z \in R\} \\ &= R^3 \end{aligned}$$

ومن الصفات الرئيسية لمولدات المجموعات نجدتها في النظرية التالية :

نظرية 2.1: إذا كان V متجهاً فضائياً وكانت $E \subseteq V$ فإن $W = \text{span}(E)$ متجه فضائي جزئي من V .

تعريف 2.3 : إذا كانت v_1, \dots, v_n عناصر متجه فضائي V فإن هذه العناصر تسمى مستقلة خطيا إذا كان التوافق الخطي :

$$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = \theta \quad (*)$$

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0 \quad \text{فإن}$$

وعليه فإن مجموعة من العناصر تكون مستقلة خطيا إذا وإذا فقط هناك طريقة وحيدة لكتابة θ كتوافق خطي لعناصر المجموعة. وتكون في هذه الحالة عوامل التوافق هي الثابت صفر. والسؤال الآن كيف نعرف ما إذا كان مجموعة من العناصر مستقلة خطيا أم لا ؟ وهنا نبحث حالتين هما الأكثر شيوعا في أفرع الرياضيات أما براهين هذه الحقائق فهي ضمن تلافيف الجبر الخطي ويمكن للطلاب أن يعود لكتب الجبر الخطي ليرى البرهان .

(n) الاستقلال الخطي في R^n :

1- لنفرض $E = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq R^n$. نكون المصفوفة A والتي تتكون صفوفها من عناصر E . نحسب محدد A والذي عادة يرمز له بالرمز $\det A$. فإن :

$$\det A \neq 0 \quad \text{عناصر } E \text{ مستقلة خطيا إذا وإذا فقط}$$

2- إذا كان عدد عناصر أكبر من n فإن عناصر E غير مستقلة خطيا أو ما يعبر عنه ب : (معتمدة خطيا) .

3- إذا كان عدد عناصر E أقل من n ، في مثل هذه الحالة لا بد من العودة إلى معادلة (*) في تعريف 2.3 ونرى إن كان هناك أكثر من حل لعوامل التوافق.

مثال (5) : عين فيما إذا كانت المجموعات التالية مستقلة أو معتمدة خطيا في R^3 .

$$E_1 = \{(1,0,0), (1,1,0), (2,0,3)\} \quad (i)$$

$$E_2 = \{(1,2,3), (2,1,4)\} \quad (ii)$$

$$E_3 = \{(1,2,1), (2,1,4), (1,0,0), (0,1,1)\} \quad (iii)$$

الحل : (i) حيث أن عدد عناصر E_1 تساوي 3 في هذه الحالة نكون المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ثم نجد } \det A .$$

$$\det \Lambda = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

وعليه عناصر E_1 مستقلة خطيا.

(ii) في هذه الحالة لا بد من العودة إلى المعادلة (*)

$$C_1(1,2,3) + C_2(2,1,4) = (0,0,0)$$

$$C_1 + 2C_2 = 0, \quad 2C_1 + C_2 = 0, \quad 3C_1 + 4C_2 = 0 \quad \text{ومنه}$$

ونلاحظ هنا أن الحل لهذه المعادلات هو $C_1 = C_2 = 0$ وعليه فالمجموعة E_2 مستقلة خطيا.

(iii) حيث أن عدد عناصر E_3 أكبر من 3 فنصغر المجموعة E_3 معتمدة خطيا.

(b) الاستقلال الخطي في $C[a,b]$:

لنفرض أن $E = \{y_1, \dots, y_n\}$ مجموعة في $C[a,b]$. ولنفرض أن الاقترانات y_1, \dots, y_n قابلة للاشتقاق $n-1$ من المرات. والآن نضع للتعريف التالي:

تعريف 2.4: نسمى المحدد

$$W[y_1, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

رونسكي الاقترانات y_1, \dots, y_n .

مثال (6): أوجد رونسكي x, e^x .

$$W[x, e^x] = \begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} = xe^x - e^x$$

والآن نضع الحقيقة التالية دون برهان.

نظرية 2.2: إذا كان $W[y_1, \dots, y_n] \neq 0$ عند نقطة ما في مجال

لاقترانات y_1, \dots, y_n فإن هذه الاقترانات تكون مستقلة خطيا.

و هذه النظرية تعطينا طريقة سهلة لمعرفة الاعتماد والاستقلال الخطي للاقترانات.

مثال (7) : ابحث الاعتماد والاستقلال الخطي لمجموعة الاقرانات التالية :

$$E_1 = \{\sin(x), \cos(x)\} \quad (i)$$

$$E_2 = \{1, x, x+x^2\} \quad (ii)$$

الحل : (i) نجد رونسكي الاقرانات :

$$W[\sin(x), \cos(x)] = \begin{vmatrix} \sin(x) & \cos(x) \\ \cos(x) & -\sin(x) \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

وعليه فإن $\sin(x), \cos(x)$ مستقلة خطياً .

(ii)

$$W[1, x, x+x^2] = \begin{vmatrix} 1 & x & x+x^2 \\ 0 & 1 & 1+2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

وعليه فإن $1, x, x+x^2$ مستقلة خطياً .

ملاحظة 2.1 : لعلك تسألت (وهذا دليل يقظتك) ماذا لو كان $W[y_1, \dots, y_n] = 0$

لكل x في مجال الاقرانات ، فهل هذا يعني أن تلك الاقرانات معتمدة خطياً ؟ والجواب أنه

لا نستطيع استنتاج معلومات عند الاستقلال والاعتماد الخطي من المعلومة :

$$W[y_1, \dots, y_n] = 0 \quad \text{بل هناك حالات}$$

فيها $W[y_1, y_2] = 0$ عند كل نقاط المجال ولكن الاقرانين y_1, y_2 مستقلان خطياً.

وللمزيد من مذاق الجبر الخطي لمتل تلك الفاكهة نحريك إلى الجبر الخطي في هذا الموضوع .

مسائل

الوحدة الأولى

بنذ-2

1- جد مجموعة E بحيث $W = \text{span}(E)$:

$$(a) \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(b) \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(c) \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ x+z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(d) \quad W = \{ax^2 + bx : a, b \in \mathbb{R}\}$$

2- هل يمكن للمجموعات التالية أن تولد \mathbb{R}^3 :

$$(a) \quad E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (b) \quad E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(c) \quad E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3- افحص أي المجموعات التالية تولد المتجه الفضائي :

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} : x - y + z = 0 \text{ و } w - x + y + z = 0 \right\}$$

$$(a) \mathbf{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (b) \mathbf{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$4(c) \mathbf{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

-4 صح أو خطأ :

- (a) $\mathbf{E}_1 \subseteq \mathbf{E}_2 \Rightarrow \text{span}(\mathbf{E}_1) \subseteq \text{span}(\mathbf{E}_2)$
 (b) $\text{span}(\mathbf{E}_1) \subseteq \text{span}(\mathbf{E}_2) \Rightarrow \mathbf{E}_1 \subseteq \mathbf{E}_2$
 (c) $\text{span}(\mathbf{E}_1) = \text{span}(\mathbf{E}_2) \Rightarrow \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$
 (d) $\{x^2 + 4x - 3, 2x^2 + x + 5, 7x - 11\}$ spans \mathbf{P}_2

-5 افحص الاستقلال والاعتماد للمجموعات التالية :

- (a) $\mathbf{E} = \{(1, 2, -1), (3, 1, -1)\}$ (b) $\mathbf{E} = \{(0, 1, 1)\}$
 (c) $\mathbf{E} = \{(4, 2, 1), (-1, 3, 7), (0, 0, 0)\}$
 (d) $\mathbf{E} = \{(1, 2, -5), (-2, -4, 10)\}$

$$\mathbf{E} = \{2x^3 - x + 3, 3x^3 + 2x - 2, x^3 - 4x + 8, 4x^3 + 5x - 7\} \quad \text{إذا كانت}$$

مجموعة جزئية من \mathbf{P}_3 فبرهن أن :

- (a) \mathbf{E} مستمدة خطيا .
 (b) كل مجموعة من ثلاث عناصر في \mathbf{E} مستقلة خطيا .
 (c) كل مجموعة من عنصرين في \mathbf{E} مستقلة خطيا .

-7 افحص الاستقلال والاعتماد للمجموعات التالية :

- (a) $\mathbf{E} = \{1, x, e^x\}$ (b) $\mathbf{E} = \{\sin(x), \cos(x), x \sin(x)\}$
 (c) $\mathbf{E} = \{e^x, xe^x, x^2e^x\}$ (d) $\mathbf{E} = \{\sin(x), \sin 2(x), \sin(x) \cos(x)\}$

3- الأساس والبعاد (Basis And Dimension)

نبدأ هذا البند بالتعريف التالي :

تعريف 3.1 : إذا كان V متجهاً فضائياً وكانت $E = \{v_1, \dots, v_n\}$ بحيث $\text{span } E = V$ فإننا نسمي V فضاء منتهي التوليد (Finitely generated).

مثال (1) : R^2 فضاء منتهي التوليد حيث أن :

$$R^2 = \text{span}\{(1,0), (0,1)\}$$

مثال (2) : P_3 فضاء منتهي التوليد حيث أن

$$P_3 = \text{span}\{1, x, x^2, x^3\}$$

مثال (3) : $C[0,1]$ ليس منتهي التوليد . فليس هناك مجموعة منتهية تسمح لنا $C[0,1]$.

تعريف 3.2 : إذا كان $V = \text{span} E$ حيث $E = \{v_1, \dots, v_n\}$ مستقلة خطياً . فإننا نسمي E أساساً للفضاء V .

مثال (1) : في الفضاء R^2 ، المجموعة $E = \{(0,1), (1,0)\}$ أساس وهذا من معلوماتنا السابقة أن $\text{span} E = R^2$ ، كذلك E مستقلة خطياً .

مثال (2) : في الفضاء P_2 ، المجموعة $E = \{1, x, x^2\}$ أساس ، حيث $\text{span} E = P_2$ ، وكذلك E مستقلة خطياً .

والآن نمرد لك نص نظرية دون برهانها:

نظرية 3.1 : إذا كان $V = \text{span} E_1 = \text{span} E_2$ وكانت E_1, E_2 مجموعتين مستقلتين خطياً ، فإن عدد عناصر E_1 يساوي عدد عناصر E_2 .

وكأن انتظرية تقول (أي أساس للفضاء لهما نفس عدد العناصر) . ونعتقد أنك لاحظت أن نص النظرية يعلن أن الفضاء V يمكن أن يكون له أكثر من أساس وهذا قول صواب . فمثلاً : $E_1 = \{(0,1), (1,0)\}$ ، $E_2 = \{(1,1), (1,-1)\}$ هما أساسان للفضاء R^2 . ولكن كلاهما له نفس عدد العناصر .

والنظرية تؤهلنا أن نضع التعريف التالي :

تعريف 3.3 : إذا كان فضاء V منتهي التوليد وكانت E أساسا لـ V فإن عدد عناصر E يسمى بعد V .

مثال (1) : بعد \mathbb{R}^2 هو 2، حيث $E = \{(0,1), (1,0)\}$ أساس للفضاء \mathbb{R}^2 .

مثال (2) : يمكنك للتأكد من المعلومات التالية :

$$\text{بعد } n = \mathbb{R}^n$$

$$\text{بعد } n+1 = P_n$$

$$\text{بعد } 3 = \text{span}\{e^x, x, \sin(x)\}$$

مسائل

الوحدة الأولى

بند-3

1- حدد بعد الفضاءات التالية :

- (a) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$
- (b) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$
- (c) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$
- (d) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$

2- أي المجموعات التالية أساس للفضاء المرافق :

- (a) $E = \{(2,1), (3,0)\}$, $V = \mathbb{R}^2$
- (b) $E = \{(2,3,-1), (4,1,1), (0,-7,1)\}$, $V = \mathbb{R}^3$
- (c) $E = \{1, x - 1, x^2 + 2x + 5, x^2\}$, $V = P_2$
- (d) $E = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$, $V = M_{2 \times 2}$

3- حد أساسا للمتجهات الفضائية الجزئية التالية :

- (a) $W = \{(x, y, z) : 3x - 2y + 5z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$
- (b) $W = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_0 = 0\} \subseteq P_3$
- (c) $W = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq M_{2 \times 2}$

4- المصفوفات والمحددات (Matrices And Determinants)

موضوع المصفوفات من المواضيع الرئيسة في الرياضيات والتعزيبات وغيرها من أفرع العلوم. وسوف نكتفي بسرد تعريفها وخصائصها الرئيسة ونترك الجاد في طلب العلم يعود بنفسه إلى أمهات كتب الجبر الخطي كي يروي ظمأه العلمي.

وسنبدأ بتعريف المصفوفة والتعريف المشهور في الكتب محط نقاش . وسوف لن نفتح باب جدل هنا وسنسير على ما سالت عليه "غزية" .

تعريف 4.1: المصفوفة هي صيف مستطيلي من الأعداد الحقيقية ، مرتبة في صفوف وأعمدة . وهذه الأعداد تسمى مداخل المصفوفة .

ومن الأمثلة على ذلك :

$$C = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

حيث A له صفان وثلاثة أعمدة ، B له ثلاثة صفوف وعمودان ، C له ثلاثة صفوف وعمود واحد . وإذا كانت A مصفوفة لها m من الصفوف و n من الأعمدة فإتينا نقول أن سعة A هي $m \times n$. سوف نرسم لمجموعة المصفوفات ذات سعة $m \times n$ بالرمز $M_{m \times n}$.

وإذا كان $A \in M_{m \times n}$ فإتينا نكتب $A = (a_{ij})$ ، $1 \leq j \leq n$ ، $1 \leq i \leq m$.

يمكننا تعريف : $A + B = C$ حيث $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

وكذلك $rA = D$ حيث $d_{ij} = ra_{ij}$

ولن نملك ما لا طاقه لك به إن طلبنا منك التأكيد من صحة "عملية الجمع وضرب الثوابت" المبينة الذكر على $M_{m \times n}$ التي تجعل من $M_{m \times n}$ "متجها فضاءيا" . وإذا كان $A \in M_{m \times n}$ وكان $v \in M_{1 \times n}$ فإتينا نعرف Av بالشكل :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \cdots + a_{mn}b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = V \quad \text{حيث} \cdot \text{وعليه يكون :}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \\ -1 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 13 \end{pmatrix}$$

ويرتبط مع المصفوفة مفهوم مهم هو مفهوم المحدد وليس من السهل أن نعرض لك تعريف المحدد بشكله المختزل . هذه مسؤولية أهل الجبر الخطي . لكننا نأخذ ما نحتاجه ونعرضه بصورة عملية قابلة للاستعمال .
ولذلك نعرض لك التعاريف التالية :

تعريف 4.2 : إذا كان $A \in M_{n \times n}$ ، فإن المصفوفة الجزئية A_{ij} هي المصفوفة التي نحصل عليها من حذف الصف رقم i والعمود رقم j . وعليه $A_{ij} \in M_{(n-1) \times (n-1)}$

$$\text{فمثلا : إذا كان } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \text{ ، فإن}$$

$$A_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

تعريف 4.3 : إذا كان $A \in M_{2 \times 2}$ ، فإن محدد A هو :

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\text{فمثلا : إذا كان } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ، فإن } |A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 4 = 10$$

تعريف 4.4 : إذا كان $A \in M_{n \times n}$ ، فإن محدد A هو :

$$|A| = (-1)^{1+1} a_{11} |A_{11}| + (-1)^{1+2} a_{12} |A_{12}| + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} |A_{1n}|$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{فمثلا : إذا كان}$$

فإن :

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

وعليه فإن حساب محددات المصفوفات يؤول في النهاية إلى حساب محددات مصفوفات من سعة 2×2 .

فمثلا :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 - 20) - 1 \cdot (0 - 12) + 2 \cdot (0 + 3) = 0$$

وأخيرا نعرض التعريف التالي :

تعريف 4.5 : إذا كان $A \in M_{n \times m}$ ، وكان

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

فإن منقول A هو المصفوفة

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ومن أهم خصائص المنقول :

- (1) $(A+B)^T = A^T + B^T$
- (2) $(\lambda A)^T = \lambda A^T, \lambda \in \mathbb{R}$
- (3) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

مسائل

الوحدة الأولى

بند-4

1- إذا كان $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ، $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ جد

$$B - A \quad (b) \quad 2A + B \quad (a) \quad (2B - 4A)^T \quad (c)$$

2- جد متقول كل من :

$(1, -1, 0) \quad (b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (a)$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad (c)$$

3- جد محددات المصفوفات التالية :

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 7 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix} \quad (b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (a)$

$A = \begin{pmatrix} 7 & 7 & -8 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad (c) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad (d)$

5- القيم الذاتية (Eigen Values)

نفرض أن $A \in M_{n \times n}$ ، فإن :

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

فمثلا إذا كان $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ، فإن $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 4 \\ 2 & 5 - \lambda \end{pmatrix}$

وهنا I تمثل المصفوفة المحايدة $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، وفي الحالة العامة :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

وحيث أن $A - \lambda I$ لا زالت مصفوفة مربعة ، فإنه يمكن تعريف المحدد لها ومحدد $A - \lambda I$ سوف يعتمد على λ ، وفي الحقيقة :

إذا كان $A \in M_{n \times n}$ فإن $|A - \lambda I|$ هو حدودية في λ من الدرجة n .

وهذه الحدودية لها أصفار حقيقية أو مركبة (وفق معلوماتنا عن أصفار الحدوديات) ، وأصفار هذه الحدودية من الأهمية بمكان بحيث نفرّد لها تعريفا في هذه الوحدة :

تعريف 5.1 : إذا كان $A \in M_{n \times n}$ وكان λ هي قيمة ذاتية للمصفوفة A . فإن $v \in M_{1 \times n}$ يسمى متجها ذاتيا للمصفوفة A إذا كان $(A - \lambda I)v = 0$ حيث 0 هي المصفوفة الصفرية في $M_{1 \times n}$

وموضوع المتجهات الذاتية والقيم الذاتية موضوع عميق ومتشعب ، لكننا نأخذ رؤوس الأقاليم منه لحاجتنا إليها . والآن كيف نجد المتجهات الذاتية لمصفوفة ما ؟ . بطريقة حل المعادلات ! وإليك مثلا يبين ذلك .

مثال (2): جد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

الحل: نجد أولاً القيم الذاتية. وعليه نحل المعادلة $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = 0 \quad \text{أي :}$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad \text{ومنه}$$

وعليه $\lambda = 2$ ، $\lambda = 3$ هما القيم الذاتية للمصفوفة A .

والآن إلى المتجهات الذاتية :

لكل قيمة ذاتية للمصفوفة A هناك متجهات فضائية متعلقة بها .

إذن نبدأ بـ $\lambda = 2$ ونحل المعادلة :

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 1 \\ -2 & 4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + y = 0 \quad \text{ومنه}$$

$$-2x + 4y = 0$$

نجد هنا أن المعادلتين هما معادلة واحدة هي $y - x = 0$ وعليه $y = x$.

إذن كل متجه من الشكل $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ هو متجه ذاتي للمصفوفة مرتبط بالقيمة الذاتية $\lambda = 2$.

إذن المتجهات الذاتية المتعلقة بـ $\lambda = 2$ هي :

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbf{R} \right\}$$

$$= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

هل نستطيع أن نجد تلك المتجهات الذاتية المتعلقة بـ $\lambda = 3$ ؟ ليس لك خيار ، وسننتهي الوحدة عند ذلك.

مسائل

الوحدة الأولى

بند-5

1- جد القيم الذاتية للمصفوفات التالية :

$$(b) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (a) \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 12 & -51 \\ 2 & -11 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2- جد المتجهات الذاتية للمصفوفات التالية :

$$(b) \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (a) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3- برهن أنه إذا كان $A \in M_{n \times n}$ وكان V متجها ذاتيا للمصفوفة A متعلقا بالقيمة الذاتية λ فإن $AV = \lambda V$ كذلك .

4 - برهن أن للمتجهات الذاتية للمصفوفة A المتعلقة بقيمة ذاتية λ تشكل متجها فضاءيا .

الوحدة الثانية

المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الأولى

First Order Differential Equation

في هذه الوحدة سوف ندرس حلول أبسط أنواع المعادلات التفاضلية العادية تلك هي معادلات المرتبة الأولى ، ولا ندعي بأننا سوف نتعرض لكل معادلات المرتبة الأولى ، فهذا فوق الواسع . لكننا سنغطي ما يكفل لك السبلحة على شواطئ محيط المعادلات . ولقد أقرنا لكل نوع من معادلات الدرجة الأولى بنذا . سوف نقوم بعرضها تباعا . والمسفر الطويل يحتاج لصاحب مسفر رحب المصدر . فها كنت كذلك : صاحبنا في مسفرنا هذا !

1- مقدمة (Introduction)

هذا بند نعرض فيه تعريف المعادلة التفاضلية العادية .

معنى المعادلة التفاضلية العادية :

" معادلة تفاضلية " عبارة مكونة من كلمتين : " معادلة " و " تفاضلية " . أما " معادلة " فتعني " متساوية " وهذا ليس جديدا عليك أما الصفة " تفاضلية " فتعني أن المتساوية تحوي على " تفاضل " . ووجود التفاضل يعني وجود لقران (أو دالة) قابلة للاشتقاق . فلو فرضنا أن الاقتران هو y وأن x هو المتغير الذي يعتمد عليه y فإن المعادلة التفاضلية في y هي كل معادلة تحوي على y وعدد من مشتقات y : $y, y', y'', y''', y^{(4)}, \dots, y^{(n)}$. وعليه فإن المعادلات التالية هي معادلات تفاضلية :

$$(i) \quad y' + x = 1$$

$$(ii) \quad y'' + e^{xy} = y'$$

$$(iii) \quad y^{(4)} + \sin(xy') = e^x y''$$

حيث $y^{(n)}$ هي $\frac{d^n y}{dx^n}$.

أما المعادلة $3x = y^2 + x^2$ فهي ليست معادلة تفاضلية لخلوها من تفاضل y بالنسبة للمتغير x . أما كلمة " عادية " فهي صفة لا بد منها وهي تعني أن الاقتران y لا يعتمد إلا على متغير واحد هو x . فإذا اعتمد y على أكثر من متغير ، ففي تلك الحالة ، يكون الاشتقاق اشتقاقا جزئيا (partial derivate) ، وهنا نسمي المعادلة " معادلة تفاضلية جزئية " وهذا موضوع سوف ندرسه عند بلوغك سن الرشد الرياضي . ومرتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى مرتبة للتفاضل تظهر في المعادلة . فمثلا :

$$x = y'' + (y')^4$$
 هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية . والمعادلة

$$e^x = (y^4)^7 + y^{(8)}$$
 هي من المرتبة الخامسة . وهكذا .

والآن إلى المثال التالي :

مثال (1) ، عين أي المعادلات التالية تفاضلية عادية وحدد المرتبة :

$$3x^2 + (y')^2 = 1 \quad (i)$$

$$4x + 2y = \sin(xy) \quad (ii)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xyz \quad (iii)$$

$$(xy')^2 + (y^{(3)}e^x)'' = xy \quad (iv)$$

$$3x^2 + (y')^2 = 1 \quad (i) \quad \text{المحل :}$$

هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى .

$$4x + 2y = \sin(xy) \quad (ii)$$

ليست معادلة تفاضلية .

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xyz \quad (iii)$$

هي معادلة تفاضلية لكنها ليست عادية لأن الاقتران z يعتمد على متغيرين هما x, y .

$$(xy')^2 + (y^{(3)}e^x)'' = xy \quad (iv)$$

هي معادلة تفاضلية عادية . أما للمرتبة فإنها خمسة حيث أنه $(y^{(3)}e^x)''$ ينتج لنا $y^{(5)}$

بعد إكمال عملية التفاضل .

مسائل

الوحدة الثانية

هند-2

1- حدد نوع المعادلات التالية :

$$y'' + y = x \quad (a)$$

$$3xy - y = \sin x \quad (b)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0 \quad (c)$$

$$y[y' - x] = x \quad (d)$$

2- حدد مرتبة المعادلات التفاضلية التالية :

$$(y' + x)'' = e^x \quad (a)$$

$$\frac{d}{dx} [y' - y] = x \quad (b)$$

$$y^{(7)} [y - y^{(8)}] = y^7 \quad (c)$$

$$(x + y)'' = \sin y \quad (d)$$

2- حل المعادلة التفاضلية (Solution of Differential Equations)

نفترض أن لدينا معادلة تفاضلية عادية . ماذا تعني بحل تلك المعادلة ؟ . عبارة " إيجاد حل " تعني إيجاد شيء مجهول أو تحديد شيء مجهول .
والمجهول في معادلتنا هو الاقتران y . فحل المعادلة إذن تعني به إيجاد الاقتران y الذي يحقق المعادلة . فلنضع ذلك في تعريف رياضي . وقبل ذلك هل هناك شكل عام للمعادلة التفاضلية العادية ؟ نعم . فإذا كان y هو الاقتران معتمدا على المتغير x ، وكانت مرتبة المعادلة هي n فإننا نستطيع أن نكتب المعادلة بالشكل :

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

وهذا الشكل لا يعني أكثر من أن الطرف الأيسر لهذه المعادلة هو مقدار يحوي على $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$. فمثلا :

$$xy' + y'' = y^{(3)} - e^{xy} + 5$$

نستطيع أن نضعها بالشكل $F(x, y, y', y'', y^{(3)}) = 0$ حيث $F(x, y, y', y'', y^{(3)})$ ليس سوى $5 - e^{xy} - y^{(3)} + xy' + y''$. ولإيجاد الاقتران y يحتم بالضرورة إيجاد مجال y الذي نتحقق المعادلة لكل نقطة فيه . وبالتالي يمكننا وضع التعريف التالي :

تعريف 2.1 : نقول بأن الاقتران الحقيقي $y = y(x)$ هو حل للمعادلة $F(x, y, y') = 0$ على الفترة I ، إذا وقط I :

(1) الاقتران قابل للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط I .

(2) نتحقق المعادلة $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ عند كل نقطة في I .

والآن إليك هذه الأمثلة التالية :

1- الاقتران $y = e^x$ هو حل للمعادلة $y' - y = 0$ على الفترة $(-\infty, \infty)$.

2- الاقتران $y = \sin x$ هو حل للمعادلة $(y')^2 + y^2 = 1$ على الفترة $(-\infty, \infty)$.

3- الاقتران $y = \sqrt{x}$ هو حل للمعادلة $y' = \frac{1}{2y}$ على الفترة $(0, \infty)$.

هل لاحظت معنا أن المعادلة الواحدة يمكن أن يكون لها أكثر من حل ؟ فمثلا المعادلة الأولى لها حل آخر هو $y = 2e^x$ وأيضا $y = 3e^x$ ، في الحقيقة يمكن أن نقول أن أي اقتران من النوع $y = ce^x$ حيث c هو عبارة عن ثابت ما ، هو حل

للمعادلة $y' = y$ على الفترة $(-\infty, \infty)$. وهذا الثابت يسمى وسيط (parameter) أو ثابت اختياري . وهذه الملاحظات البسيطة نضعها لتعريف التالي :

تعريف 2.2 : نقول أن الاقتران الحقيقي y هو حل عام للمعادلة $F(x, y, y') = 0$ إذا كان y يحوي على ثابت اختياري . أما إذا خلى y من الثابت الاختياري فإنه يسمى حلاً خاصاً .

وعليه فإن $y = ce^x$ هو حل عام للمعادلة $y' = y$ بينما $y = 3e^x$ هو حل خاص .

مثال (4) : برهن أن $y = \frac{1}{x} ce^{cx}$ هو حل عام للمعادلة $xy' + y - y \ln(xy) = 0$.
البرهان : كل ما علينا فعله هو أن نعوض y في المعادلة ونرى هل تحققت المعادلة أم لا .
 والآن إلى التبريض :

$$y' = \frac{1}{x} (c - \frac{1}{x}) ce^{cx} \quad \text{إذن تصبح المعادلة :}$$

$$\begin{aligned} & x \left[\frac{1}{x} (c - \frac{1}{x}) ce^{cx} \right] + \frac{1}{x} e^{cx} - \frac{1}{x} ce^{cx} \ln \left(x \frac{1}{x} ce^{cx} \right) \\ &= (c - \frac{1}{x}) ce^{cx} + \frac{1}{x} e^{cx} - \frac{1}{x} ce^{cx} \ln(e^{cx}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

" وتبارك الله أحسن الخالقين " .

مسائل

للوحدة الثانية

بند (2)

1- افحص الاقتران إذا كان الاقتران المعطى حل للمعادلة المعطاة :

$$(a) \ y = \sqrt{1-x^2} \quad , \quad yy' + x = 0$$

$$(b) \ y = 4(x+4) \quad , \quad (y')^2 + xy' - y = 0$$

$$(c) \ y = (5 + \sin x)^2 \quad , \quad (y')^2 - 4y \cos^2 x = 0$$

$$(d) \ y = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \quad , \quad y' \sin x - y(\cos x + y \sin x) = 0$$

$$(e) \ y = e^{3x} \quad , \quad y''' - 9y'' = 0$$

2- ما هي قيمة r التي تجعل e^{rx} حلاً للمعادلة

$$y''' - y'' - 12y' = 0$$

3- ما هي قيمة k التي تجعل $y = x^k$ حلاً للمعادلة

$$x^2 y'' - 6y = 0 \quad (x > 0)$$

4- برهن أن $y = \tan^{-1}(x+c)$ هو الحل العام للمعادلة

$$y' - \cos^2 y = 0$$

3- وجود الحل والشروط الأولية :

(Existence of solution and initial cinditions)

كما أخبرناك في البند الأول ، لن نتعرض في هذه الوحدة لكل معادلات المربعية الأولى .
ولكن سوف نتعرض لمجموعة من المعادلات والتي يمكن وضع صورتها للعلامة بالشكل
كمثل : $y' = f(x,y)$

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} \quad \text{هنا} \quad y' = \frac{x+y}{x^2+y^2} \quad (1)$$

$$(2) \quad y' + xy = e^x \quad \text{والتي يمكن وضعها بالشكل} \quad y' = e^x - xy \quad \text{وهنا} \\ f(x,y) = e^x - xy$$

$$(3) \quad 3y' + x = x(y+y') \quad \text{والتي يمكن وضعها بالشكل} \quad y' = \frac{xy-x}{3-x} \quad \text{وهنا} \\ f(x,y) = \frac{xy-x}{3-x}$$

وقبل محاولة وضع طريق لحل المعادلة $y' = f(x,y)$ لا بد أن نطمئن أن هناك حلا . فإذا لم يكن هناك حل وحاولنا وضع طريق للحل ، فلن نجهدنا بذهب بلا طائل .
والسؤال الآن كيف نضمن وجود حل للمعادلة $y' = f(x,y)$ على مجال ما I بحيث أن هذا الحل y يحقق شرطا ما . ماذا يعني بشرط ما ؟ كل ما نعيه أن y يأخذ قيمة معينة كمثال :
 $y(1) = 0$ أو $y(0) = 1$. ومثل تلك الشروط تسمى شروطاً أولية أو ابتدائية . والشكل العام لمثل هذا الشرط هو $y(x_0) = y_0$. وعودا إلى السؤال كيف نضمن وجود حل للمعادلة $y' = f(x,y)$ يحقق شرطا أوليا ما ؟

الجواب في النظرية التالية :

نظرية 3.1 : لنفرض أن $y' = f(x,y)$ معادلة تحقق الشرط التالي :

و كذلك f هي اقترانات متصلة في منطقة k حيث $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$.

$k = \{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ والتي تحوي النقطة (x_0, y_0) فإن المعادلة في هذه الحالة لها حل وحيد $y = y(x)$ في فترة حول x_0 من الشكل $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ يحقق الشرط $y(x_0) = y_0$.

هل تريد أن نعلم لك البرهان لهذه النظرية ؟ لا نريد أن نفقد صحتك . ولكن إن كان لسان

حالك يقول "هل من مزيد" فأبانا نحيك لكتب الحسان المتقدم .

والآن نقدم لك المثال التالي :

مثال (4) : عين ما إذا كانت نظرية 3.1 تبين وجود حل للمعادلات التالية بالشروط الميينة :

$$y(0) = 6, \quad y' = x^3 - y^3 \quad (i)$$

$$y(1) = 0, \quad yy' = x \quad (ii)$$

$$y(1) = 0, \quad xyy' + 3e^x y + 7x = 4 \quad (iii)$$

الحل :

(i) من شكل المعادلة نحصل على $f(x, y) = x^3 - y^3$. وهذا الاقتران متصل

على \mathbb{R}^2 . وكذلك الحال مع $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2$. وحيث أن (0,6) موجودة في

\mathbb{R}^2 فإن نظرية 3.1 تؤكد لنا وجود حل للمعادلة (i) يحقق الشرط المييين .

(ii) $f(x, y) = \frac{x}{y}$. وهذا الاقتران متصل على $K = \mathbb{R} / \{(x, y) : y = 0\}$

وكذلك الحال مع $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$. وحيث أن (0,1) غير موجودة في K فإننا

غير قادرين أن نستخلص من نظرية 3.1 وجود حل للمعادلة يحقق الشرط المييين .

(iii) هنا $f(x, y) = \frac{4 - 3e^x y + 7x}{xy}$. وهذا الاقتران متصل على

$K = \mathbb{R}^2 / \{(x, y) : x \cdot y = 0\}$. وكذلك الأمر مع $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$. وحيث أن (0,1) غير

موجودة في K فإننا لا نستطيع تطبيق نظرية 3.1 لاستنتاج وجود حل للمعادلة يحقق الشرط المييين .

والآن ، أما أن لنا أن نبحر صوب شواطئ طرق حل المعادلات كما وعدنا في بداية هذه الوحدة ! إذن ليس ستره نجاتك المصنوعة من فلين الحسبان الأول والثاني ، واركب معنا ولا تخش الغرق .

4- طريقة فصل المتغيرات (Seperable Equations)

أخبرناك أننا ستعالج مجموعة من المعادلات من النوع $y' = f(x, y)$ وفي هذا البند سوف نعالج أول نوع منها .

تعريف 4.1 : نسمي المعادلة $y' = f(x, y)$ معادلة مفصولة للمتغيرات إذا كان الاقتران f من الشكل $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$.

وبناء على ذلك التعريف ، فإن المعادلة المفصولة للمتغيرات يمكن كتابتها بالشكل :

$$M(x) dx + N(y) dy = 0$$

حيث $M(x) = f_1(x)$ و $N(y) = -\frac{1}{f_2(y)}$. ومن الأمثلة على ذلك :

$$e^x dx - \cos cy dy = 0 \quad (1) \quad \text{والتي يمكن كتابتها بالشكل } y' = e^x \sin y$$

$$(x^2 + 1) dx - (|y| + 2) dy = 0 \quad (2) \quad \text{والتي يمكن كتابتها بالشكل } y' = \frac{x^2 + 1}{|y| + 2}$$

والآن كيف نحل المعادلة مفصولة المتغيرات ؟

ليس عليك سوى أن تكامل . ومنه

$$\int M(x) dx + \int N(y) dy = c$$

حيث c هو ثابت التكامل . والآن نستخدم ستره النجاة : هل تتذكر طرق التكامل من الحسبان

الثاني . ذلك ما سيمكنك من إيجاد $\int M(x) dx$ وكذلك $\int N(y) dy$.

والآن إلى بعض الأمثلة :

مثال (3) : حل المعادلة $xy dx + (x^2 + 1) dy = 0$

الحل : هذه معادلة مفصولة للمتغيرات . ونكتبها بالشكل

$$\frac{x}{(x^2 + 1)} dx + \frac{1}{y} dy = 0$$

وحيث أن $\int \frac{x}{(x^2+1)} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$ وكذلك $\int \frac{1}{y} dy = \ln|y|$ فإننا نحصل على
 $\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \ln|y| = c$ ومن خصائص اللوغاريتم $\ln z$ ، فإننا نحصل على
 $\ln(|y|\sqrt{x^2+1}) = c$ ومنه $y = \frac{e^c}{\sqrt{x^2+1}}$. وهو الحل العام لهذه المعادلة .

وقبل وضع أي مثال آخر لا بد من ملاحظة هامة :

لحل المعادلة ليس بالضرورة إيجاد y بالشكل $y = y(x)$ ، فإن ذلك قد لا يكون متيسراً في كثير من الأحيان ، في تلك الحالة يكفي أن نجد علاقة من الشكل $g(x,y) = c$.

مثال (5) : حل المعادلة $\sin x \, dx + (\cos y + y) dy = 0$.

الحل : ما علينا سوى أن نكامل ، إذن

$$\int \sin x \, dx + \int (\cos y + y) dy = c$$

ومنه

$$-\cos x + \sin y + \frac{1}{2} y^2 = c$$

وهذا هو الحل العام .

مسائل

الوحدة الثانية

بند (4)

1- حل المعادلات التفاضلية التالية :

1) $3y' = 2y$

2) $x^2y' - y^2 = 0$

3) $e^{2x}y' + e^x = 1$

4) $y' - e^x \sec y = 0$

5) $(y+1)(x^2+1) = xy'$

6) $y' = \frac{2x + xy^2}{4y + x^2y}$

7) $(10y^4 + 6)y' = y^5 + 3y + 2$

8) $ydy - (1+y)\cos^2 x \, dx = 0$

2- جد الحل الخاص للمعادلات التالية والذي يحقق الشروط المعطاة .

1) $xy' - y = 0$, $y(c) = 1$

2) $3y' + 5y = 0$, $y(0) = 3$

3) $3e^{xy} dy + \frac{dx}{x^2} = 0$, $y(1) = 2$

4) $(x+1)y' + xy = 0$, $y(1) = 4$

5) $\sqrt{1-x^2}y' + y^3 = 0$, $y(1) = 1$

6) $y^2y' = x^2$, $y(1) = 2$

7) $x^2y' - y^2 - 1 = 0$, $y(1) = 0$

8) $e^{-x}y' + xy^2 = 0$, $y(0) = 1$

3- برهن أن التعويض $z = x + y$ يحول المعادلة $y' = (x+y)^2$ إلى معادلة مفصولة المتغيرات .

5 - المعادلات المتجانسة (Homogenous Equations)

في هذا البند نعالج المعادلات التي يمكن تحويلها إلى معادلات مفصولة للمتغيرات، ونسميها بالمتجانسة . ولا نخلص هنا إلا أن نعرف معنى للتجانس .

تعريف 5.1: يسمى الاكتران $f = f(x,y)$ متجانسا من الدرجة n إذا كان
 $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$ حيث $t \in \mathbb{R}$.

هل تريد أمثلة على ذلك . إذن :

مثال (1) : $f(x,y) = x + y$ متجانس من الدرجة 1، حيث

$$f(tx,ty) = tx + ty = t(x + y) = t f(x,y)$$

مثال (2) : $f(x,y) = x^2 + y^2$ متجانس من الدرجة 2، حيث

$$f(tx,ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2(x^2 + y^2) = t^2 f(x,y)$$

مثال (3) : $f(x,y) = \sin\left(1 + \frac{x}{y}\right)$ متجانس من الدرجة 0، حيث

$$f(tx,ty) = \sin\left(1 + \frac{tx}{ty}\right) = \sin\left(1 + \frac{x}{y}\right) = f(x,y)$$

مثال (4) : $f(x,y) = ye^x$ ليس متجانسا، حيث

$$f(tx,ty) = tye^{tx} \neq t^k ye^x$$

مهما كانت k في \mathbb{R} .

لحل سرعة بديهة، لو صلتك إلى معنى المعادلة المتجانسة قبل أن نضع لك تعريفها ! .

تعريف 5.2: تسمى المعادلة التفاضلية $y' = f(x,y)$ معادلة متجانسة إذا كان الاكتران
 $f = f(x,y)$ اقترانا متجانسا .

وهنا نود أن نلفت نظرك أن شكل المعادلة $y' = f(x,y)$ يمكن كتابته بالشكل

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$$

متجانسان ومن نفس درجة التجانس . والأمثلة التالية توضح ما نقول .

مثال (5) : أي المعادلات التالية متجانسة .

$$(x^2 + y^2) dx + 2xy dy = 0 \quad (i)$$

$$y dx + (x + y + 1) dy = 0 \quad (ii)$$

$$x^2 dx + (x^3 + y^3) dy = 0 \quad (iii)$$

الحل : (i) $M(x,y) = x^2 + y^2$ لقران متجانس من الدرجة الثانية

$N(x,y) = 2xy$ لقران متجانس من الدرجة الثانية

إذن المعادلة متجانسة .

(ii) $M(x,y) = y$ لقران متجانس من الدرجة الأولى

$N(x,y) = x + y + 1$ لقران غير متجانس

إذن المعادلة غير متجانسة .

(iii) $M(x,y) = x^2$ لقران متجانس من الدرجة الثانية

$N(x,y) = x^3 + y^3$ لقران متجانس من الدرجة الثالثة

إذن المعادلة غير متجانسة .

والآن كيف نحل المعادلة المتجانسة ؟

لأن نقول لك في بداية البند أن هذه المعادلة يمكن تحويلها إلى مفصلة المتغيرات . ولكن كيف يمكن ذلك ؟

ما علينا سوى أن نقوم بالتعويض التالي :

$$y = vx \quad \text{والذي يعطينا :} \quad dy = v dx + x dv$$

فإذا ما استبدلنا vx بـ y واستبدلنا $v dx + x dv$ بـ dy فإن المعادلة

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$$

$$\frac{1}{x} dx + \frac{N(1,v)}{M(1,v) + vN(1,v)} dv = 0$$

وهذه معادلة مفصلة المتغيرات . نحل المعادلة ثم نعوض $v = \frac{y}{x}$ لنحصل على الحل العام

للمعادلة الأصل .

والآن إلى مثال يكون شاهدا وميلغا ويسيرا .

$$\text{مثال (6) : حل المعادلة } y' = \frac{y+x}{x-y}$$

الحل : يمكن كتابة المعادلة بالشكل :

$$(x+y) dx + (y-x) dy = 0 \quad \text{وهذه معادلة متجانسة. إذن نضع } y = vx \quad \text{وكذلك}$$

$$dy = v dx + x dv$$

$$(x + vx) dx + (vx - x)(v dx + x dv) = 0$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها بالشكل

$$\frac{dx}{x} + \frac{v-1}{v^2+1} dv = 0$$

وبالتكامل نجد أن :

$$\ln|x| + \frac{1}{2} \ln(v^2+1) - \tan^{-1}v = \ln c, \quad c > 0$$

وباستخدام خصائص الاقترانين $f(x) = \ln x$ و $g(x) = e^x$ نحصل على

$$x\sqrt{v^2+1} = ce^{\tan^{-1}v}, \quad c \neq 0$$

وأخيرا نعوض $v = \frac{y}{x}$ لنجد أن الحل العام للمعادلة هو بالشكل

$$\frac{x}{|x|} \sqrt{x^2 + y^2} = ce^{\tan^{-1} \frac{y}{x}}$$

وما أجمل النهاية المصححة .

مسائل

الوحدة الثانية

بند (5)

1- أي الاقترانات التالية متجانسة وأيها غير متجانسة. وفي حالة التجانس أعط الدرجة .

(a) $f(x, y) = x^2 + xy - x^2(x + y)$

(b) $f(x, y) = \sin\left(\frac{x}{y}\right) + 5$

(c) $f(x, y) = x \sin \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y}$

(d) $f(x, y) = x \ln y + ye^x$

(e) $f(x, y) = e^{\left(\frac{x}{y}\right)} + \frac{2x}{y}$

2- حل المعادلات التفاضلية التالية .

(a) $(x^2 + y^2)dx + 2xy dy = 0$, $y(1) = 2$

(b) $y dx - (x - \sqrt{x^2 + y^2}) dy = 0$, $y(1) = 0$

(c) $xy' - y \left[\ln\left(\frac{y}{x}\right) + 1 \right] = 0$

(d) $y' = \frac{x - y}{x + y}$

(e) $(x^2 + y^2)dx + 3xy dy = 0$

(f) $y^2 xy' + y^3 - x^3 = 0$

(g) $x^2 y' - y^2 - 4yx = 0$

3- برهن أن الاقتران $f(x, y) = x^2 + 2xy^2 + y^3$ يحقق المعادلة

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 3f$$

4- برهن أنه إذا كان $f(x, y)$ اقترانا متجانسا من الدرجة n فإن f يحقق معادلة أيلر

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = nf$$

6- المعادلات المضبوطة (Exact Equations)

كم يتمنى أحننا أن يكون كل شيء في حياتنا مضبوطا. وفي هذا البند سوف نناقش معادلة مضبوطة. وإليك التعريف .

تعريف 6.1 : نسمي المعادلة $M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$ معادلة مضبوطة في المنطقة K إذا وجد الاقتران $F = F(x,y)$ بحيث $M(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}$, $N(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}$ لكل (x, y) في K .

ولكن من معلوماتنا من حسابان (3) ، فإن تفاضل F يمكن وضعه بالشكل :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

وعليه إذا كانت المعادلة مضبوطة فإنها تأخذ الشكل $dF = 0$ والتي يكون حلها $F(x,y) = c$ حيث c ثابت ما .

وللوصول إلى ذلك الحل السهل تعرضنا لمشكلتان : -

(i) كيف يمكننا الفحص ببسر على أن المعادلة مضبوطة ؟

(ii) كيف نجد الاقتران F الوارد في تعريف 6.1 ؟

لكننا نرى الشوق في عينك إلى معرفة الإجابة ؟ لقد صحتنا «فلسوف نكرم صحتك .إليك الحل للمشكلتين :

ملحوظة 6.2 : لنفرض أن $M(x,y)$ و $N(x,y)$ هما الاقتران متصلان على المنطقة K بحيث $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ، $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$ ، $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$. إذا كان $M dx + N dy = 0$ فإن المعادلة معادلة مضبوطة .

هذه النظرية تعطينا طريقة سهلة لفحص انضباط المعادلة ، ويراهنا خارج نطاق هذا الكتاب ، وتجدّه في الكتب المتقدمة للحساب.والآن إلى الأمثلة :

مثال (1) : $(2x + e^y) dx + xe^y dy = 0$ معادلة مضبوطة على \mathbb{R}^2 حيث
 $\frac{\partial N}{\partial x} = e^y$, $\frac{\partial M}{\partial y} = e^y$

مثال (2) : $(\frac{y}{x} + \ln y) dx + (\frac{x}{y} + \ln x) dy = 0$
هنا M و N متصلان ولهما مشتقات جزئية متصلة على $K = \{(x,y) : x > 0, y > 0\}$
وكذلك : $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{y}$, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x}$
إذن المعادلة مضبوطة.

أما كيف نجد الاقتران فإليك البيان المضبوط في إزالة الشبهة والغموض :
ما هي المعطيات ؟ إنها : $\frac{\partial F}{\partial x} = M$, $\frac{\partial F}{\partial y} = N$
حيث أن $\frac{\partial F}{\partial x} = M$ ، فإن التكامل بالنسبة لـ x يعطينا :
 $F(x,y) = \int M(x,y) dx + c$ حيث c هو ثابت التكامل . لكن c ثابت بالنسبة لـ x وليس
بالنسبة لـ y ، وعليه $c = c(y)$. لنجد c : نشق الآن بالنسبة لـ y ما نتج عن التكامل
بالنسبة لـ x . وعليه :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y) dx + \frac{\partial}{\partial y} c(y)$$

نعوض عن N بـ $\frac{\partial F}{\partial y}$ لنحصل على

$$\frac{\partial}{\partial y} c(y) = N - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y) dx$$

هذه المعادلة تعطينا c وذلك بالتكامل بالنسبة لـ y .
وهذا يحدد لنا F تماما .

والآن إلى المثال التالي :

مثال (3) : حل المعادلة $(2x + e^y) dx + xe^y dy = 0$
الحل : هذه المعادلة مضبوطة كما في مثال (1) . إذن
 $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + e^y$

تكامل بالنسبة لـ x لنحصل على :

$$F(x, y) = x^2 + xe^y + c(y)$$

نفاضل بالنسبة لـ y لنحصل على :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xe^y + \frac{\partial c}{\partial y}$$

نستخدم المتساوية $\frac{\partial F}{\partial y} = N$ لنحصل على :

$$xe^y = xe^y + \frac{\partial c}{\partial y}$$

أي أن $\frac{\partial c}{\partial y} = 0$ ومنه $c = \lambda$ ، حيث λ ثابت حقيقي .

إذن الحل العام له الشكل $x^2 + xe^y = \gamma$ ، حيث γ ثابت ما .

هل تريد مثالا آخر ؟ ما عليك إلا أن تقول نعم . إذن :

مثال (4) : حل المعادلة $\left(\frac{y}{x} + \ln y\right) dx + \left(\frac{x}{y} + \ln x\right) dy = 0$

الحل : هذه المعادلة مضبوطة كما في مثال (2) على $\{ (x, y) : x > 0, y > 0 \}$

إذن :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y}{x} + \ln y$$

تكامل بالنسبة لـ x لنحصل على :

$$F(x, y) = y \ln x + x \ln y + c(y) \dots\dots (*)$$

نفاضل بالنسبة لـ y لنحصل على :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \ln x + \frac{x}{y} + \frac{\partial c}{\partial y}$$

نستخدم المتساوية $\frac{\partial F}{\partial y} = N$ لنحصل على :

$$1 + \frac{x}{y} + \ln x = \frac{x}{y} + \ln x + \frac{\partial c}{\partial y}$$

أي أن $\frac{\partial c}{\partial y} = 1$ والذي يعطينا $c(y) = y + a$ ، حيث a ثابت حقيقي .

إذن من معادلة (*) يكون الحل العام له الشكل

$$y \ln x + x \ln y + y = b$$

حيث b ثابت حقيقي ما .

وهذا يضبط نهاية هذا البند .

مسائل

الوحدة الثانية

بند (6)

1- حل المعادلات التفاضلية التالية :

$$(1) \quad 2xy \, dx + (x^2 + 4y) \, dy = 0$$

$$(2) \quad y(y^2 - 3x^2) \, dx + x(3y^2 - x^2) \, dy = 0$$

$$(3) \quad \left(\frac{1}{y} + \frac{y}{x^2} \right) dx - \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{y^2} \right) dy = 0$$

$$(4) \quad (\sin xy + xy \cos xy) \, dx + x^2 \cos xy \, dy = 0$$

$$(5) \quad \frac{ydx - xdy}{(x+y)^2} + \frac{1}{y} \, dy = 0$$

$$(6) \quad x^2 \, dx + y^2 \, dy + \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0$$

$$(7) \quad \frac{ydx - xdy}{xy} + \frac{xdy + ydx}{\sqrt{1+(xy)^2}} = 0$$

$$(8) \quad (1 + \ln xy) \, dx + \left(1 + \frac{x}{y} \right) dy = 0$$

$$(9) \quad \left(\frac{y}{x} + \ln y \right) dx + \left(\frac{x}{y} + \ln x \right) dy = 0$$

$$(10) \quad (ye^x + e^x) \, dx + (e^x + xe^x) \, dy = 0$$

$$(11) \quad (\cos xy - \sin xy)(y \, dx + x \, dy) = 0$$

$$(12) \quad 2\sec^2(x^2 + y^2)(x \, dx + y \, dy) = 0$$

$$(13) \quad (1 + \tan xy) \, dx + (\sec xy \tan xy + x \sec^2 xy)(y \, dx + x \, dy) = 0$$

$$(14) \quad y(e^y + y) \, dx + x(e^y + 2y) \, dy = 0$$

$$(15) \quad \frac{(y \, dx + x \, dy)}{1+(xy)^2} = 0$$

2- ما هي قيم r التي تجعل المعادلات التالية متذبذبة .

$$(1) \quad 2y \, dx + (y^2 - rx) \, dy = 0$$

$$(2) \quad \sin y \, dx + (x' \cos y + y^2) \, dy = 0$$

$$(3) \quad (y^4 + 2rxy) \, dx + (4xy^3 + rx^2) \, dy = 0$$

$$(4) \quad (3x^2 - 3y' + rx) \, dx + (3xy^{-2} - 3r + 7) \, dy = 0$$

7 - عامل التكميل (Integrating Factor)

ليس كل شيء مضبوطا في هذه الحياة . وهنا يأتي جهد الإنسان ليضبط غير المضبوط .
وفي هذا البند سوف نحاول ضبط المعادلات غير المضبوطة .
وهذا يستدعي التعريف التالي :

تعريف 7.1 : لنفرض أن

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 \dots\dots (*)$$

معادلة معادلة ولن $u = u(x,y)$. إذا كانت المعادلة

$$u(x,y) \cdot M(x,y) dx + u(x,y) \cdot N(x,y) dy = 0$$

مضبوطة، فإن الاقتران u يسمى عامل التكميل للمعادلة (*) .

ومن الأمثلة على ذلك :

$$\text{مثال (1) : } (x + 2y) dx - x dy = 0$$

هذه المعادلة ليست مضبوطة حيث $\frac{\partial M}{\partial y} = 2$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -1$

ولكن لنضرب المعادلة بـ $\frac{1}{x^3}$ ، فلن المعادلة تصبح

$$\frac{x+2y}{x^3} dx - \frac{1}{x^2} dy = 0$$

هذه المعادلة مضبوطة حيث $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2}{x^3}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2}{x^3}$

إن عملية ضبط المعادلة تتلخص في إيجاد عامل التكميل .

وبعد ذلك نحل المعادلة على أنها معادلة مضبوطة .

والسؤال : " كيف نجد عامل التكميل " ؟

هناك قواعد معينة عامة لإيجاد ذلك العامل نلخصها لك تلخيص سهل ممتع في القاعدة العامة

التالية :

قاعدة إيجاد عامل التكميل للمعادلة :

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$$

1- إذا كان $\frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = f(x)$ فإن عامل التكميل هو $u(x,y) = e^{\int f(x) dx}$

2- إذا كان $\frac{1}{M} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = g(x)$ فإن عامل التكميل هو $u(x,y) = e^{-\int g(x) dx}$

3- إذا كان M و N متجانسان من نفس الدرجة فإن عامل التكميل هو $u = \frac{1}{xM + yN}$

4- إذا كان $M = x f(x \cdot y)$, $N = x g(x \cdot y)$ وكان $f \neq g$ فإن عامل التكميل هو

$$u = \frac{1}{xy[f(x \cdot y) - g(x \cdot y)]}$$

هل هناك حالات أخرى يمكن إيجاد عامل التكميل ؟

نعم إليك هذه المجموعة من الحالات :

5- إذا ضمت المعادلة المقدار $y dx + x dy$ فإن $u(x,y) = \frac{1}{xy}$ يحول $y dx + x dy$

إلى $d(\ln xy) = \frac{y dx + x dy}{xy}$

6- إذا ضمت المعادلة المقدار $x dx + y dy$ فإن $u(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ يحول

$x dx + y dy$ إلى $\frac{1}{2} d(\ln(x^2 + y^2)) = \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$

7- إذا ضمت المعادلة المقدار $y dx - x dy$ فإن $u(x,y) = \frac{1}{y^2}$ يحول $y dx - x dy$

إلى $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y dx - x dy}{y^2}$

ولا بد أن نلاحظ أنه في الحالة (7) يمكن استخدام

(i) $\frac{1}{x^2}$ لتحصل على $-d\left(\frac{y}{x}\right)$

(ii) $\frac{1}{xy}$ لتحصل على $d\left(\ln \frac{x}{y}\right)$

(iii) $\frac{1}{x^2 + y^2}$ لتحصل على $d\left(\tan^{-1} \frac{x}{y}\right)$

لنلنا بالغنا في للجفاف ، وأصبح الأمر يحتاج إلى قطر التندى .

مثال (2) : حل المعادلة $2x \, dx + [(x^2 + 1)\cot y - 1] \, dy = 0$

الحل : هذه المعادلة ليست مضبوطة . إذن نحاول إيجاد عامل تكميل .

نجد المقدار $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$. وإن أجريت الحسابات ستجده يساوي $-2x\cot y$.

إذن $\frac{1}{M} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = -\cot y$

وحسب القاعدة (2) فإن عامل التكميل هو

$$u(x,y) = e^{-\int g(x) \, dx} = e^{\int \frac{\cos y}{\sin y} \, dy}$$

$$= e^{\ln \sin y} = \sin y$$

نستخدم عامل التكميل لنحصل على المعادلة :

$$2x \sin y \, dx + [(x^2 + 1)\cos y - \sin y] \, dy = 0$$

إذن نحلها كما في البند السابق لنحصل على شكل الحل العام :

$$(x^2 + 1)\sin y + \cos y = b$$

حيث b ثابت ما .

مثال (3) : حل المعادلة $xy^2 \, dx + y \, dx - x \, dy = 0$

الحل : نلاحظ أن المعادلة ضمت المقدار $y \, dx - x \, dy = 0$

وهذا المقدار تعلق به حسب الحالة (7) أربعة كميات :

$\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{y^2}$, $\frac{1}{xy}$, $\frac{1}{x^2 + y^2}$. نختار منها ما يناسب المعادلة . والذي يناسب المعادلة هو

ذلك المقدار الذي يصنع مما بقي من المعادلة (وهو $xy^2 \, dx$) تفاضل كامل . أي ما يمكننا

من كتابة $(xy^2 \, dx)$ على شكل $d\theta$ لمقدار ما θ . ولا نظنك تخالفنا الرأي إن قلنا لك إن

$\frac{1}{y^2}$ يفني بالغرض حيث $\frac{1}{y^2} \cdot xy^2 \, dx$ يصبح $\frac{1}{2} \, dx^2$.

وعليه فإن عامل التكميل لمعادلتنا هو $\frac{1}{y^2}$. وتصبح المعادلة بالشكل :

$$\frac{xy^2 dx}{y^2} + \frac{y dx - x dy}{y^2} = 0$$

ومنه

$$\frac{1}{2} dx^2 + d\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{y} = b \quad \text{وبالتكامل نحصل على :}$$

حيث b ثابت ما .

نعم إنك فرح بهذه النهاية وكذلك نحن ، وإلى بند آخر لنعالج فوجا جديدا من المعادلات .

مسائل

الوحدة الثنية

بند (7)

1- حول المعادلات التالية إلى معادلات مضبوطة عن طريق إيجاد عامل التكميل ثم حل المعادلة .

$$(a) \quad y' + xy = 3x \quad (b) \quad y' - \frac{1}{2x}y = 2$$

$$(c) \quad y' - 2y = xe^{2x} \quad (d) \quad y' + \frac{4xy}{x^2 + 1} - 3x = 0$$

$$(e) \quad y' + \frac{1}{x \ln x} y = 3x^2$$

2- جد الحل العام للمعادلات التالية عن طريق إيجاد عامل التكميل

$$(1) \quad 3x^4y^2 dx + ydx + x dy = 0$$

$$(2) \quad y(y^2 + 1) dx + x(y^2 - 1) dy = 0$$

$$(3) \quad y dx + [y(x^2 + y^2) - x] dy = 0$$

$$(4) \quad \left(\frac{y}{x} + 2 \right) dx + \left(\frac{x}{y} + 2 \right) dy = 0$$

$$(5) \quad y(xy + 1) dx - x(xy - 1) dy = 0$$

$$(6) \quad (1 + xy) dx + x^2 dy = 0$$

$$(7) \quad (x - y(x^2 + y^2)) dx + (y + x(x^2 + y^2)) dy = 0$$

$$(8) \quad y^2 dx + (x^2 - xy - y^2) dy = 0$$

$$(9) \quad y(y^3 + 1) dx - x(y^3 - 2) dy = 0$$

$$(10) \quad (y^2 + 1) dx + y(x + y^2 - 1) dy = 0$$

$$(11) \quad (x^2 + y^2 + x) dx + xy dy = 0$$

$$(12) \quad (\sec x + y \tan x) dx + dy = 0$$

$$(13) \quad y dx + x(1 - x^2y^2) dy = 0$$

$$(14) \quad [2 \tan x + (x + y) \sec^2 x] dx + 2 \tan x dy = 0$$

$$(15) \quad x dy - y dx - (1 - x^2) dy = 0$$

8- المعاملات الخطية (Linear Coefficients)

في هذا البند نعالج نوعا آخر من المعادلات الخطية ذات المرتبة الأولى. وهذا النوع هو:

تعريف 8.1: تسمى المعادلة $M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$ ذات معاملات خطية إذا
كان $N(x,y) = a_2x + b_2y + c_2$, $M(x,y) = a_1x + b_1y + c_1$

مثال (1): $y' = \frac{x+1}{2x+y-3}$ هي معادلة ذات معاملات خطية ، حيث :

$$N(x,y) = -(2x+y-3) , M(x,y) = x+1$$

ملاحظة: إذا كان $c_1 = c_2 = 0$ فإن المعادلة تصبح متجانسة .

والآن كيف يمكن أن نحل المعادلة ذات المعاملات الخطية ؟ إليك البيان التالي :
هناك حالتان لا بد من علاجهما .

الحالة الأولى: $a_2x + b_2y = t(a_1x + b_1y)$

في هذه الحالة نقوم بالتعويض $u = a_1x + b_1y$

ومنه نحصل على $du = a_1dx + b_1dy$ أو $u' = a_1 + b_1y'$ وعليه

$$y' = \frac{u' - a_1}{b_1} . \text{ نعوض في المعادلة الأسامية لنحصل على :}$$

$$u' - a_1 = b_1 \left(\frac{u + c_1}{tu + c_2} \right)$$

وهذه معادلة مفصولة المتغيرات في u و x . نحلها كما في البند الأول ثم نعوض بدل

$$u = a_1x + b_1y$$

الحالة الثانية: $a_2x + b_2y \neq t(a_1x + b_1y)$ لكل t في R

وهذه تحصل عندما يكون $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ (أما إذا كان $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ فتلك هي

الحالة الأولى)

ولمعالجة هذه الحالة ، نضع التعويض التالي :

$$x = u + d_1, \quad y = v + d_2$$

حيث d_1, d_2 ثابتان نختارهما بحيث تصبح المعادلة :

$$(a_1 u + b_1 v) du + (a_2 u + b_2 v) dv = 0 \dots\dots (*)$$

وعليه فإن d_1, d_2 يحققان المعادلتين :

$$a_1 d_1 + b_1 d_2 + c_1 = 0 \dots\dots (i)$$

$$a_2 d_1 + b_2 d_2 + c_2 = 0 \dots\dots (ii)$$

المعادلة (*) متجانسة . نحلها وفق طريقة البند الثاني. ثم نجد d_1, d_2 بحل المعادلتين

$$(i), (ii) \text{ ونعوض } v = y - d_2, u = x - d_1$$

والآن إلى مثال يربط ذلك الجفاف .

$$\text{مثال (2) : حل المعادلة } y' = -\frac{x+y+1}{x+y}$$

الحل : هذه المعادلة ذات معاملات خطية . ونلاحظ أن

$$a_1 x + b_1 y = x + y, \quad a_2 x + b_2 y = x + y$$

إذن نضع $x + y = u$ ومنه $y' = u' - 1$ نعوض في المعادلة لنحصل على :

$$u' - 1 = -\frac{u+1}{u}$$

ومنه $u du = -x dx$ ، وعليه $x^2 + u^2 = c$ حيث c ثابت ما . وحيث $u = x + y$ فإن الحل

$$\text{العام للمعادلة هو } x^2 + (x+y)^2 = c$$

$$\text{مثال (3) : حل المعادلة } (x+2y-5)dx + (4-2x-y)dy = 0$$

الحل : نضع هذه المعادلة هو وضع الحالة الثانية . إذن نضع

$$x = u + d_1, \quad y = v + d_2$$

$$d_1 + 2d_2 - 5 = 0, \quad 4 - 2d_1 - d_2 = 0 \dots\dots (i)$$

تصبح المعادلة بالشكل :

$$(u+2v) du + (-2u-v) dv = 0$$

وهذه معادلة متجانسة . وطريقة حلها : نضع $w = \frac{v}{u}$ ومنه $dv = u dw + w du$

نعوض لنحصل على :

$$(u+2uw) du - (2u+uw)(u dw + w du) = 0$$

نجمع الحدود لنحصل على :

$$u(1-w^2) du - u^2(2+w) dw = 0$$

وبالتالي :

$$\frac{du}{u} - \frac{2+w}{1-w^2} dw = 0$$

تكامل لينتج لدينا :

$$\ln|u| - \left[\ln \left| \frac{1-w}{1+w} \right| - \frac{1}{2} \ln|1-w^2| \right] = c$$

ومنه $\frac{u^2(1+w)^3}{1-w} = b$ ، حيث b ثابت ما . نعوض $w = \frac{v}{u}$ ليكون :

$$\frac{(u+v)^3}{(u-v)} = b$$

والآن نجد d_1, d_2 :

$$d_1 + 2d_2 = 5$$

$$2d_1 + d_2 = 4$$

نحلها لنحصل على $d_2 = 2, d_1 = 1$.

إذن الحل العام لمعادلتنا هو :

$$\frac{(x+y-3)^3}{(x-y-1)} = b$$

لعل هذا ينهي البند دون غموض .

مسائل

الوحدة الثانية

بند (8)

1- حل المعادلات التالية :

$$(1) (x+2y-5) dx + (4-2x-y) dy = 0$$

$$(2) (8x-y+5) dx - (4x-y+3) dy = 0$$

$$(3) (2x+3y) dx + (3x-y-11) dy = 0$$

$$(4) (x-y-2) dx + (2-x-2y) dy = 0$$

$$(5) (x+2y+3) dx + (x+7) dy = 0$$

$$(6) (x-2y-1) dx - (4x-9y-4) dy = 0$$

$$(7) (2x-3y+5) dx + (y-1) dy = 0$$

$$(8) (4x+y-2) dx + (3x+y-2) dy = 0$$

$$(9) (5x+4y-4) dx + (4x+5y-5) dy = 0$$

$$(10) (9x+3y-12) dx - (3x-y-2) dy = 0$$

9- اختزال الرتبة (Reduction Of Order)

هنا نعالج معادلات المراتبة الثانية والثالثة والتي يمكن تحويلها إلى المراتبة الأولى .
وسوف نعالج عملية تحويل المعادلة في حالتين :

الحالة الأولى : عدم ظهور y في المعادلة

$$\text{كمثل } y'' + y' = x \text{ و } xy''' + e^x y' = 1$$

وطريقة الحل لمثل هذه الحالة هو التعويض $y' = u$, $y'' = u'$

مثال (1) : حل المعادلة $xy'' = y'$

الحل : نضع $y' = u$ وعليه $y'' = u'$

تصبح المعادلة إذن $xu' = u$ ومنه $\frac{du}{u} = \frac{dx}{x}$ وبالتكامل نحصل على : $u = ax$

حيث a ثابت موجب ولكن $u = y'$. إذن $y' = ax$ ومنها نحصل بالتكامل على

$$y = \frac{ax^2}{2} + b$$

هل لاحظت أن الحل العام يحتوي على ثابتين . ذلك لأن المعادلة من المراتبة الثانية .

الحالة الثانية : عدم ظهور x في المعادلة

$$\text{كمثل } yy'' + y' = y^2 \text{ و } y'' - y' = 0$$

وطريقة الحل لمثل هذه الحالة هو التعويض $y' = u$ ويكون $y'' = u \frac{du}{dy}$

مثال (2) : حل المعادلة $yy'' + (y')^2 = 0$

الحل : نضع $y' = u$. ومنه $\frac{dy'}{dx} = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx}$. أي أن $y'' = u \frac{du}{dy}$

وبالتعويض في المعادلة تصبح المعادلة كالتالي :

$$y u \cdot \frac{du}{dy} + u^2 = 0$$

$$\frac{du}{u} + \frac{dy}{y} = 0$$

ومنه

وبالتكامل نحصل على : $u \cdot y = a$ ، حيث a ثابت موجب . ولكن $u = y'$. إذن $y'y = a$. وبالتالي $y dy = a dx$ و بالتكامل نحصل على $y^2 - ax = b$ ، و هو الحل العام للمعادلة.

دعنا نلق عند هذا الحد لنجعل هذا البند بندا خفيفا .

مسائل

الوحدة الثانية

بند (9)

1- حل المعادلات التالية :

$$(1) \quad xy'' = y'$$

$$(2) \quad yy'' + (y')^2 = 0$$

$$(3) \quad y''' - y'' = 1$$

$$(4) \quad y'' = 1 + (y')^2$$

$$(5) \quad y'' - k^2 y = 0$$

$$(6) \quad yy'' + (y')^3 = 0$$

$$(7) \quad yy'' = 2y^2 - 2y'$$

$$(8) \quad x^2 y'' = 2xy' + (y')^2$$

$$(9) \quad (y^2 + 1)y'' - 2y(y')^2 = 0$$

$$(10) \quad y'' + 2y - 2y^3 = 0$$

الوحدة الثالثة
المعادلات التفاضلية الخطية
" Linear Differential Equations "

هذه الوحدة نعالج فيها نمطا جديدا من المعادلات التفاضلية ، تلك هي المعادلات التفاضلية الخطية.

١- التعريف :

كما ورد في البند السادس للوحدة الأولى فإن من أهم أنواع المؤثرات على المتجهات الفضائية هي مؤثرات التفاضل والتي تؤثر على الاقترانات القابلة للتفاضل . ومثل تلك المؤثرات تشكل العمود الفقري لموضوعنا في هذه الوحدة والتي نلجأ إليها . وسنبدأ بتعريفنا الرئيسي لهذه الوحدة.

تعريف ١.١ : المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n هي كل معادلة من الشكل :

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x) \quad (*)$$

حيث $a_0, a_1, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ هي اقترانات معرفة على الفترة I ، وهي مجال تفاضل y وكذلك a_n ليس الاقتران الصفري على I . إذا كان $a_n \neq 0$ لكل x في I فإن المعادلة تسمى معادلة خطية طبيعية.

ومن الأمثلة على ذلك :

$$y'' + xy' - 3y = 0 \quad (1)$$

$$y'' + y' - 2y = 0 \quad (2)$$

$$(x+1)y^{(4)} + 2y'' - 2y = \sin x \quad (3)$$

ويمكن إعادة كتابة المعادلة (*) باستخدام المؤثرات الخطية على النحو التالي :

$$L(y) = f$$

$$L = a_n \frac{d^n}{dx^n} + \dots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0 \quad \text{حيث}$$

والمعادلات الخطية نوعان :

1- معادلات خطية متجانسة. وهي المعادلات التي يكون فيها $f = 0$. وعليه فهي من

$$L(y) = 0$$

2- معادلات خطية غير متجانسة. وهي المعادلات التي يكون فيها $f \neq 0$.

وكلا النوعين يكون على نوعين :

(1) معادلات خطية ذات معاملات متغيرة . وهي المعادلات التي يكون فيها

$$a_0, a_{-1}, a_{-2}, \dots, a_n \text{ القترافات في } x$$

(2) معادلات خطية ذات معاملات ثابتة . وهي المعادلات التي يكون فيها

$$a_0, a_{-1}, a_{-2}, \dots, a_n \text{ ثوابت}$$

أريد أمثلة توضح هذه الأنواع ؟ سنفعل إن لصغيت بقلبك ونظرت ببصيرتك .

مثال (1) : بين نوع المعادلات التالية :

$$x^2 y'' + y' - 3y = 0 \quad (i)$$

$$y^{(4)} - 3y'' + y = \tan x \quad (ii)$$

$$y''' + 2y'' + y' + 2y = 0 \quad (iii)$$

$$xy''' + x^2 y'' + \frac{1}{1+x^2} y' = e^x \quad (iv)$$

الحل : (i) معادلة خطية متجانسة ذات معاملات متغيرة .

(ii) معادلة خطية غير متجانسة ذات معاملات ثابتة .

(iii) معادلة خطية متجانسة ذات معاملات ثابتة .

(iv) معادلة خطية غير متجانسة ذات معاملات متغيرة .

وكل من المعادلات الأربعة طبيعية على $[1, \infty)$ مثلا .

هذا هو شكل المعادلات الخطية . فكيف يكون الحل ؟ لننتقل إذن إلى البند الثاني .

مبائل

الوحدة الثالثة

بند(1)

1- عين نوع المعادلات التفاضلية التالية :

- (1) $y' + x^2y = 1$
 - (2) $y'' - e^x y' + e^x = 0$
 - (3) $y'' - yy' = 2x + 3$
 - (4) $(\sin x)y''' + y'' - y = 0$
 - (5) $(y + x)y' + 5y'' = 1$
 - (6) $2y'' - 3y' + y + \cos x = 0$
 - (7) $(y' + 1)'' + y = 0$
 - (8) $e^x + y' = x$
 - (9) $\sin y' + \cos y = 0$
 - (10) $y'' + y' + y = e^x$
-

2- حل المعادلة الخطية (Solution Of Linear Equation)

هناك ثلاث قضايا رئيسة عند مناقشة حل المعادلة التفاضلية الخطية $L(y) = f$:

- (i) وجود الحل .
- (ii) وحدانية الحل .
- (iii) شكل الحل .

أما وجود الحل فإليك النظرية التالية :

نظرية 2.1 : إذا كان $f, a_0, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$ اقترانات متصلة على فترة I

تحتوي النقطة x_0 فإن المعادلة :

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f$$

لها حل في الفترة I .

أما وحدانية الحل فالجواب عليه في النظرية التالية :

نظرية 2.2 : إذا كان $f, a_0, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$ اقترانات متصلة على فترة I

تحتوي النقطة x_0 فإن المعادلة :

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f$$

لها حل وحيد على الفترة I يحقق الشروط

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

حيث y_1, \dots, y_{n-1} هي أعداد حقيقية .

أما برهان نظرية 2.1 فذلك جزء من مادة نظرية المعادلات التفاضلية والتي نحتاج دراستها

إلى أدوات من التحليل المتقدم ، وهذه ليست من مهمة هذا الكتاب .

أما برهان نظرية 2.2 فنترك هذا لك هدية من عند أنفسنا .

والآن كيف نحل المعادلة $L(y) = f$ ؟ ما هو شكل الحل ؟

إليك البيان :

(1) إن حلول المعادلة $L(y) = 0$ هي تلك الاقترانات التي تنتمي إلى مغني المؤثر L .

وكما سبق في الوحدة الأولى من هذا الكتاب ، فإن مغني L هو متجه فضائي . ومغني L في

هذه الحالة يسمى فضاء الحلول .

وبعد فضاء الحلول يعتمد على L . وسوف نسرّد عليك النظرية التالية دون برهان :

نظرية 2.3 : إذا كان $L = a_n \frac{d^n y}{dx^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0$ وكانت $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ اقترانات متصلة على فترة I ، فإن مغني L في $C^{(n)}[I]$ هو متجه فضائي ذو بعد n ، بشرط أن يكون $a_n(x) \neq 0$ لكل x في I .

وإذا كان $E = \{y_1, \dots, y_n\}$ هي أساس لمغني L ، فإن E تسمى مجموعة الحلول الأساسية للمعادلة $L(y) = 0$ وفي تلك الحالة فإن أي حل للمعادلة $L(y) = 0$ هو من الشكل $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ ، أي أنه ينتمي لمولد E .

إن الحل العام للمعادلة $L(y) = 0$ هو بالشكل $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ حيث $\{y_1, \dots, y_n\}$ هي مجموعة الحلول الأساسية للمعادلة $L(y) = 0$.

هل تعلم لماذا استخدمنا الرمز y_h ؟

هو رمز الحل العام للمعادلة المتجانسة (homogenous) $L(y) = 0$.

(2) لنفرض أن z هو أي حل يحقق المعادلة $L(y) = f$. وفي هذه الحالة

$$\begin{aligned} L(y_h + z) &= L(y_h) + L(z) \\ &= 0 + f = f \end{aligned}$$

أي أن $y_h + z$ هو حل للمعادلة $L(y) = f$. وهذا الحل يحتوي على n من الثوابت .

والحل z هو حل خاص للمعادلة $L(y) = f$ ، ولذلك سوف نرمز له بالرمز y_p .

(particular solution) . وعليه :

نظرية 2.4 : إن الحل العام y_h للمعادلة $L(y) = f$ هو $y_h = y_h + y_p$ حيث y_h هو الحل العام للمعادلة $L(y) = 0$ و y_p هو حل خاص للمعادلة $L(y) = f$.

لما كيف نجد y_p ، فإن ذلك مهمة البتود المتتالية والوحدة الرابعة . وسوف نعرض

التفصيل وفق مرتبة المعادلة ومعاملات L ، فإلى ذلك ندعوك .

مسائل

الوحدة الثالثة

بند (2)

1- إذا كان $L(y) = x^2 y'' + y$

جد $L(e^{2x})$, $L(\sin x)$

2- إذا كان $L(y) = 2y'' - e^x y' + xy$

جد $L(\cos x)$, $L(x^2)$

3- برهن أن $y_2 = e^{-x}$, $y_1 = e^{2x}$ هما حلان أساسيان للمعادلة $y'' - y' - 2y = 0$ ، ثم

جد حلا خاصا لهذه المعادلة يحقق الشروط $y(0) = -1$, $y'(0) = 4$.

4- أي من المعادلات التالية تنطبق عليها نظرية 2.2 :

(a) $(1+x^2)y'' + xy' - y = \tan x$, $y(1) = y'(1) = a$

(b) $x^2 y'' + xy' + y = \cos x$, $y(0) = y'(0) = 0$

(c) $e^x y'' - \frac{y'}{x-3} + y = \ln x$, $y(1) = y'(1) = b$

(d) $y'' + xy' - x^2 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

(e) $(1-x)y'' + xy' - 2y = \sin x$, $y(0) = y'(0) = 1$

3- المعادلات الخطية من المرتبة الأولى (First Order Linear Equations)

هذه معادلات من الشكل :

$$a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = f$$

ومن الشرط $a_1(x) \neq 0$ لكل x في الفترة I ، فإن المعادلة يمكن كتابتها بالشكل :

$$y' + p(x)y = Q(x)$$

والحل العام لهذه المعادلة هو $y_g = y_h + y_p$ وفق نظرية 2.4 .

أما y_h :

نأخذ المعادلة

$$y' + p(x)y = 0$$

ومنه

$$\frac{dy}{y} = -p(x) dx$$

$$y_h = c_1 e^{-\int p(x) dx}$$

إذن

أما y_p :

نضرب طرفي المعادلة في $e^{\int p(x) dx}$ لنحصل على

$$e^{\int p(x) dx} [y' + p(x)y] = e^{\int p(x) dx} \cdot Q(x)$$

ومنه

$$\frac{d}{dx} \left[y e^{\int p(x) dx} \right] = e^{\int p(x) dx} \cdot Q(x)$$

وهذا يعطينا

$$y_p = e^{-\int p(x) dx} \left[c_1 + \int e^{\int p(x) dx} Q(x) dx \right]$$

وعليه فالحل العام هو :

$$y_g = e^{-\int p(x) dx} \left[c_1 + \int e^{\int p(x) dx} Q(x) dx \right]$$

والآن لنرطب لك الجو بيمض الامثلة.

مثال (1) : حل المعادلة $2y' + 3y = e^{-x}$.

الحل : هنا $p(x) = \frac{3}{2}$ ، $Q(x) = \frac{e^{-x}}{2}$.

وعليه

$$\begin{aligned} y_s &= e^{-\int \frac{3}{2} dx} \left[\int e^{\int \frac{3}{2} dx} \cdot \frac{e^{-x}}{2} dx + c_1 \right] \\ &= e^{-\frac{3}{2}x} \left[\int \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2} dx + c_1 \right] \\ &= e^{-\frac{3}{2}x} \left[e^{-\frac{x}{2}} + c_1 \right] \\ &= c_1 e^{-\frac{3}{2}x} + e^{-x} \end{aligned}$$

مثال (2) : حل المعادلة $(x^2 + 1)y' - 2xy = x^2 + 1$.

الحل : هنا $p(x) = \frac{-2x}{1+x^2}$ ، $Q(x) = 1$.

وعليه

$$y_s = e^{\int \frac{2x}{1+x^2} dx} \left[\int e^{-\int \frac{2x}{1+x^2} dx} \cdot 1 dx + c_1 \right]$$

وحيث أن

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{1+x^2} dx &= \ln(1+x^2) \\ y_s &= e^{\ln(1+x^2)} \left[\int e^{-\ln(1+x^2)} dx + c_1 \right] \\ &= [1+x^2] \left[\int \frac{1}{1+x^2} dx + c_1 \right] \\ &= [1+x^2] \tan^{-1}(1+x^2) + c_1(1+x^2) \end{aligned}$$

سنكتفي بهذا القدر من الأمثلة ونتركك مع المسائل تعالجها بنفسك إذ نريد أن نتابع سيرنا إلى وحدة أخرى نتعرف فيها على المزيد من المعادلات .

مسائل

الوحدة الثالثة

بند (3)

1- حل المعادلات التفاضلية التالية :

$$(1) \quad y' + y = x$$

$$(2) \quad y' + \frac{1}{x+1}y = \frac{\cos x}{x+1}$$

$$(3) \quad y' + y = e^x$$

$$(4) \quad \frac{1}{x}y' + 2y = 2x^2$$

$$(5) \quad (\cos x)y' + (\sin x)y = x$$

$$(6) \quad y' - 2xy = 1$$

$$(7) \quad xy' + y = x \cos x$$

$$(8) \quad y' - 8y = e^x$$

$$(9) \quad y' - \frac{2}{x^2}y = \frac{1}{x^2}$$

$$(10) \quad y' + 2xy = 2x$$

$$(11) \quad y' + \left(2 + \frac{1}{x}\right)y = 2e^{-2x}$$

$$(12) \quad (1+x^2)y' + 4xy = x$$

3- معادلة برنولي (Bernoli's Equation)

إن معادلة برنولي معادلة من الدرجة الأولى ليست خطية . لكننا نستطيع تحويلها إلى معادلة خطية . أما كيف يتم ذلك فإليك البيان .

إن الشكل العام لمعادلة برنولي هو :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \dots\dots\dots(1)$$

حيث n عدد حقيقي . فإذا كان $n = 0$ أو $n = 1$ فإن المعادلة هي معادلة خطية ولا جديد لدينا .

ونلاحظ أيضاً أن $y = 0$ هو حل للمعادلة (1) .

أما طريقة تحويل المعادلة (1) إلى معادلة خطية فإننا نكتب (1) على الشكل

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \dots\dots\dots(2)$$

فلنضرب أن $y \neq 0$.

نضع الآن $u = y^{1-n}$. نفاضل بالنسبة لـ x لنحصل على :

$$\frac{du}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx}$$

وتصبح المعادلة (2) على الشكل :

$$\frac{1}{n-1} \frac{dy}{dx} + P(x)u = Q(x)$$

وهي خطية من المرتبة الأولى في المتغير u .

نحلها فنجد u ثم نعوض $u = y^{1-n}$.

هل تريد أن نحل لك مثلاً . إليك ذلك .

$$\text{مثال (2)} : \text{ حل للمعادلة } y' : y = (xy)^2$$

المحل : هذه معادلة برنولي لأنها من الشكل :

$$\frac{dy}{dx} + y = x^2 y^2$$

وعليه $n = 2$. نضع $u = \frac{1}{y}$ ومنه $\frac{du}{dx} = -\frac{1}{y^2} y'$. تصبح المعادلة على الشكل :

$$\frac{du}{dx} - u = -x^2$$

وهي خطية . نحلها بطريقة البند السابق لنجد أن :

$$u = 2 + 2x + x^2 + ce^x$$

$$. \quad y = \frac{1}{u} = \frac{1}{2 + 2x + x^2 + ce^x} \quad \text{وعليه}$$

نختتم هذا البند بتحذيرك من أن معادلة برنولي التي أوردناها هي برنولي في y . وهذا يعني

أنها قد تكون برنولي في x من مثل

$$\frac{dx}{dy} + P(y) x = Q(y) x^n$$

والطريقة هي نفسها . هل دهشت من ذلك ؟ .

مسائل

الوحدة الثالثة

بند (4)

1- حل المعادلات التفاضلية التالية :

$$(1) y' + \sqrt{x} y = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{x}{y}}$$

$$(2) y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2 y^3}$$

$$(3) x^2 y' + y^2 - xy = 0$$

$$(4) xy' - (1+x)y - y^2 = 0$$

$$(5) y' + \frac{2y}{x} = -x^2 y^2$$

$$(6) y' + y = 2x^2 y^2$$

$$(7) yy' + xy^2 - x = 0$$

$$(8) 2yy' + y^2 \sin x - \sin x = 0$$

$$(9) xy' - \frac{y}{2 \ln x} - y^2 = 0$$

$$(10) y' - y + xe^{-x} y^3 = 0$$

2- حل المعادلة :

$$y(x) + \int_0^x y(t) dt = x$$

3- حل المعادلة :

$$y(x) + 2 \int_0^x t y(t) dt = x^2$$

4- المعادلات الخطية من المرتبة الثانية ورونسكي الحلول .
(Second Order Linear Equations And The Wronskian)

سنعالج في هذا البند المعادلات من الشكل :

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \dots\dots (*)$$

وحيث أن هذه المعادلة من المرتبة الثانية فإن فضاء الحلول ثنائي البعد ، وأن أساس الفضاء مجموعة : $E = \{y_1, y_2\}$ وإيجاد حل لهذه المعادلة ليس أمر سهلاً في الحالة العامة .
ولكن باستخدام رونسكي الحلول ، يمكننا معرفة y_2 إذا عرفنا y_1 . هذه هي قضية هذا البند .

إن مفهوم رونسكي لمجموعة من الاقتربات قد مر بنا في الوحدة الأولى . والسؤال هنا :
هل يمكن معرفة $W[y_1, y_2]$ دون معرفة y_1, y_2 في حالة كانت $E = \{y_1, y_2\}$ هي أساس فضاء الحلول للمعادلة (*) ؟ .

والجواب يكمن في النظرية التالية :

نظرية 5.1 : إذا كانت $E = \{y_1, \dots, y_n\}$ هي أساس فضاء الحلول للمعادلة

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_0 y = 0$$

فإن رونسكي الحلول هو :

$$W[y_1, \dots, y_n](x) = c e^{\int a_{n-1}(x) dx}$$

حيث c ثابت غير صفري .

البرهان : سنبرهن هذه النظرية فقط في حال $n = 2$.
وعليه معادلتنا هي :

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

وأساس فضاء الحلول هي المجموعة $E = \{y_1, y_2\}$.

دعنا نكتب $W(x)$ بدلا من $W[y_1, y_2](x)$.

والآن

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dx}(x) &= \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \\ &= y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x) \\ &= y_1(x)[-a_1(x)y_2'(x) - a_0(x)y_2(x)] \\ &= -y_2(x)[-a_1(x)y_1'(x) - a_0(x)y_1(x)] \\ &= -a_1(x)[y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_2(x) \cdot y_1'(x)] \\ &= -a_1(x) W(x)\end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned}\frac{dW}{W} &= -a_1(x) dx \\ \ln W &= -\int a_1(x) dx + b \quad \text{أو} \\ W &= e^b \cdot e^{-\int a_1(x) dx} = ce^{-\int a_1(x) dx} \quad \text{وعليه}\end{aligned}$$

هل تتفق معنا أن هذا ينهي البرهان ؟ لا بد لك من ذلك .
والآن : هل هناك فائدة لهذه النظرية ؟
الجواب : نعم تعطينا الحل الثاني إن عرفنا الحل الأول .
وإليك التفصيل :

مطوية 5.2 : إذا كان y_1 حلاً للمعادلة $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ وكان $y_1(x) \neq 0$ لكل x في الفترة I ، فإن $y_2 = y_1(x) \int \frac{W(x)}{y_1^2(x)} dx$ حل ثاني على الفترة I ونكون المجموعة $E = \{y_1, y_2\}$ هي أساس فضاء الحلول للمعادلة على الفترة I .

البرهان : من النظرية 5.1 السابقة لدينا $W = ce^{-\int a_1(x) dx}$ على الفترة I .
ومن هذا نحصل على :

$$\begin{aligned}y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) &= ce^{-\int a_1(x) dx} \\ \text{وحيث } y_1(x) &\neq 0 \text{ لكل } x \in I \text{ فإن :}\end{aligned}$$

$$y_2' - \left(\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} \right) y_2 = c \frac{e^{-\int a_1(x) dx}}{y_1}$$

وهذه معادلة خطية في y_2 . ومن البند الثالث نحصل على حل خاص لها بالشكل :

$$y_2 = e^{\int \frac{y_1'(x)}{y_1(x)} dx} \left[e^{\int \frac{y_1'(x)}{y_1(x)} dx} c \frac{e^{-\int a_1(x) dx}}{y_1(x)} \right]$$

وحيث $0 \neq c$ ، يمكننا أن نختار $c = 1$ لنحصل على

$$y_2 = y_1(x) \int \frac{W(x)}{y_1^2(x)} dx$$

وهذا ينهي برهان النظرية .

والآن إلى بعض الأمثلة .

مثال (1) : جد حلا ثانيا في أساس فضاء الحلول للمعادلة $y'' + (\tan x - 2 \cot x)y' = 0$ إذا كان $y_1 = 1$.

الحل : وفق قانون الحل الثاني فإن

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1(x) dx}}{y_1^2(x)} dx$$

وفي حالتنا $a_1(x) = \tan x - 2 \cot x$ ، وفيه

$$\begin{aligned} e^{-\int a_1(x) dx} &= e^{-\int \tan x dx + 2 \int \cot x dx} \\ &= e^{\ln(\cos x) + 2 \ln(\sin x)} \\ &= \cos x \cdot \sin^2 x \end{aligned}$$

إن

$$\begin{aligned} y_2 &= \int \frac{\cos x \cdot \sin^2 x}{1} dx \\ &= \frac{\sin^3 x}{3} \end{aligned}$$

مثال (2) : جد حلا ثانيا في أساس فضاء الحلول للمعادلة :

$$y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = 0$$

إذا كان على الفترة $y_1 = x$ على الفترة $(0, \infty)$.

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1(x) dx}}{y_1^2(x)} dx \quad \text{المحل :}$$

$$= x \int \frac{e^{\int \frac{1}{x} dx}}{x^2} dx$$

$$= x \int \frac{1}{x} dx$$

$$y_2 = x \ln x$$

ونقف هنا كي نستأنف معبرتنا في بند جديد .

مسائل

الوحدة الثالثة

بند (5)

1- جد رونسكي الحلول الأساسية للمعادلات التالية :

$$(1) x^2 y'' + xy' + (x^2 + 1)y = 0, y_1(0) = 0, y_1'(1) = 1, y_2(1) = y_2'(1) = 1$$

$$(2) x^2 y'' - 3xy' + y = 0, y_1(-1) = y_1'(-1) = 2, y_2(-1) = 0, y_2'(-1) = -1$$

$$(3) y'' - (\sin x)y' + 3(\tan x)y = 0, y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0, y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$$

2- جد حلا ثانيا أساسيا للمعادلات التفاضلية التالية :

$$(1) y'' - 2y' + y = 0, y_1 = e^x$$

$$(2) y'' - 4y' + 4y = 0, y_1 = e^{2x}$$

$$(3) y'' + (\tan x)y' - 6(\cot^2 x)y = 0, y_1 = \sin^3 x$$

$$(4) 3xy'' - y' = 0, y_1 = 1$$

$$(5) (1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, y_1 = x$$

$$(6) (1 - x^2)y'' - 2xy' = 0, y_1 = 1$$

$$(7) 2xy'' - e^x y' = 0, y_1 = 1$$

$$3- \text{برهن أن } y_2 = y_1(x) \int_0^x \frac{e^{\int_0^t a_1(t) dt}}{y_1^2(t)} dt \text{ و } y_1 = y_1(x)$$

والوردين في نظرية 5.2 مستقلان خطيا .

6- حدوديات مؤثر التفاضل (Polynomials In D)

هذا بند مهم لأنه سيسهل علينا لغة الكتابة في الوحدة الرابعة وما يليها . فلنبداً في موضوعنا مباشرة .

$D^n = \frac{d^n}{dx^n}, D^{n-1} = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}, \dots, D = \frac{d}{dx}$	<p style="text-align: center;">اسمك على رمز : سوف نكتب</p>
---	--

وليس بالأمر الصعب أن ترى بنفسك أن D^n, D^{n-1}, \dots, D هي مؤثرات خطية على الفضاءات $C^n[a, b], C^{n-1}[a, b], \dots, C^1[a, b]$ حيث :

$$C^n[a, b] = \{ f \in C[a, b] : f^{(n)}(x) \text{ موجود ومتصل على } [a, b] \}$$

ونستطيع أن نكون حدوديات من النمط :

$$P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 I$$

حيث $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ ثوابت أو القترانات في x . ومن الأمثلة على ذلك :

$$(i) \quad P(D) = D^2 - 2D + I$$

$$(ii) \quad P(D) = x^2 D^2 + 3x D - 5I$$

$$(iii) \quad P(D) = D^4 - e^x D + \sin x I$$

وكل هذه حدوديات في D .

وهنا يقفز سؤالان إلى ذهن القارئ والكاتب وهما :

(1) هل نستطيع تحليل الحدودية إلى عوامل أولية كما في حالة الحدوديات العادية ؟

(2) إذا كان $(a_1 D + b_1), (a_2 D + b_2)$ عاملين من عوامل $P(D)$ فهل

$$(a_2 D + b_2) \cdot (a_1 D + b_1) = (a_1 D + b_1) \cdot (a_2 D + b_2) ?$$

$$\text{حيث} \quad P_1(D)P_2(D)y = P_1(D)[P_2(D)y]$$

والأجابة على مثل هذين السؤالين معقدة بواقع عوامل الحدودية $P(D)$.

ولنباشر الإجابة على ما هو أسهل .

ملحوظة 6.1 : إذا كان $P_1(D), P_2(D)$ حدوديتين في D ذوي عوامل ثابتة فإن :

$$P_1(D)P_2(D) = P_2(D)P_1(D)$$

البهران : ليس هناك من شيء نبرهنه . فأولا نلاحظ أن

$$D^i D^j y = D^j D^i y = y^{(i+j)}$$

وثانيا : إذا كان $P_2(D) = \sum_{i=0}^m b_i D^i$, $P_1(D) = \sum_{j=0}^n a_j D^j$ فإن :

$$\begin{aligned} P_1(D)P_2(D) &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_j b_i D^i D^j \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m a_j b_i D^j D^i \\ &= P_2(D)P_1(D) \end{aligned}$$

وهذا ينهي البرهان .

ولنرميك بسهم بعض الأمثلة كي يستبين لك الأمر :

مثال (1) : جد $P_1(D)P_2(D)$ إذا كان :

$$P_2(D) = D-4 \quad , \quad P_1(D) = 2D+1$$

الحل :

$$\begin{aligned} (2D-1)(D-4)y &= (2D-1)(y'-4y) \\ &= 2D(y'-4y) + (y'-4y) \\ &= 2y'' - 8y' + y' - 4y \\ &= 2y'' - 7y' + 4y \\ &= (2D^2 - 7D - 4)y \end{aligned}$$

$$P_1(D)P_2(D) = 2D^2 - 7D - 4 \quad \text{وعليه}$$

وقبل أن نستمر في الأمثلة ، نسجل لك الملاحظة التالية :

ملاحظة 6.1 : في عملية ضرب (تركيب) الحدوديتين $P_1(D)$, $P_2(D)$ فإننا نلاحظ ما يلي:
 نقوم بضرب الحدوديتين $P_1(t)$, $P_2(t)$ ضربا عاديا ، كما تعلمناه في الحساب .
 فإذا كان $P_2(t) P_1(t) = P_3(t)$ فإن $P_2(D) P_1(D) = P_3(D)$.

والآن إلى مثال آخر :

مثال (2) : جد $P(D)P(D)$ إذا كان :

$$P(D) = D - D + 1 \quad P(D) = D + 1$$

$$(r^2 - r + 1)(r + 1) = r^3 + 1 \quad \text{المحل ,}$$

$$P_1(D)P_2(D) = D^3 + 1 \quad \text{إن}$$

والآن ماذا عن تحليل الحدودية $P(D)$.

سنخبرك بما لم تحط به خيرا :

<p>نظرية 6.2: إذا كان $P(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$ وكان $P(t) = (b_1 t + c_1)(b_2 t + c_2) \dots (b_n t + c_n)$ هو محلل P إلى عواملها الأولية فإن $P(D) = (b_1 D + c_1)(b_2 D + c_2) \dots (b_n D + c_n)$.</p>

وليس هناك ما نبرهنه. ففرضية 6.1 مع الملاحظة 6.1 مع الحقيقة المعروفة أن كل حدودية

تحلل إلى حدوديات من الدرجة الأولى (لنظرية الأساسية في الجبر) تخرج لنا البرهان

صافيا يسر القارئ .

ولن أردت أمثلة :

$$D^2 + 2D - 3 = (D + 3)(D - 1) \quad \text{مثال (3) :}$$

$$D^2 + 1 = (D + i)(D - i) \quad \text{مثال (4) :}$$

مثال (5) :

$$\begin{aligned} D^3 + 3D^2 - D - 3 &= (D^3 - D) + (3D^2 - 3) \\ &= D(D^2 - 1) + 3(D^2 - 1) \\ &= (D + 3)(D^2 - 1) \\ &= (D + 3)(D - 1)(D + 1) \end{aligned}$$

والآن ماذا لو كانت عوامل الحدودية غير ثابتة ؟

هل تبقى الخاصية الإندالية لسلية الضرب (التركيب) قائمة ؟

والجواب على ذلك : لا !

ولكن قبل ذلك كيف نضرب حدوديتين من الدرجة الأولى ببعضهما إذا كانت العوامل غير

ثابتة . والجواب :

$$\begin{aligned}
Z &= (a_2 D + b_2) \cdot (a_1 D + b_1) y \\
&= (a_1 D + b_1)(a_2 y' + b_2 y) \\
&= (a_1 D)(a_2 y' + b_2 y) + b_1(a_2 y' + b_2 y) \\
&= a_1 \frac{d}{dx}(a_2 y') + a_1 \frac{d}{dx}(b_2 y) + b_1 a_2 y' + b_1 b_2 y
\end{aligned}$$

والآن

$$\frac{d}{dx}(a_2 y') = a_2 y'' + a_2' y'$$

وكذلك

$$\frac{d}{dx}(b_2 y) = b_2 y' + b_2' y$$

إذن

$$Z = a_1(a_2 y'' + a_2' y') + a_1(b_2 y' + b_2' y) + b_1 a_2 y' + b_1 b_2 y$$

فمثلا :

$$\begin{aligned}
(D+1)(x D + e^x) y &= (D+1)(x y' + e^x y) \\
&= D(x y') + D(e^x y) + x y' + e^x y \\
&= x y'' + y' + e^x y' + e^x y + x y' + e^x y \\
&= x D^2 y + D y + e^x D y + e^x y + x D y + e^x y \\
&= (x^2 D^2 + D + e^x D + 2e^x + x D) y \\
&= (x^2 D^2 + (1+x+e^x) D + 2e^x) y
\end{aligned}$$

وعليه :

$$(D+1)(x D + e^x) = x^2 D^2 + (1+x+e^x) D + 2e^x$$

لما أن الخاصية الإبدالية غير قائمة فإليك المثال التالي :

مثال (6) :

$$\begin{aligned}
(D-1)(x D + 1) y &= (D-1)(x y' + y) \\
&= D(x y' + y) - (x y' + y) \\
&= x y'' + y' + y' - x y' - y \\
&= (x D^2 + (2-x) D - 1) y
\end{aligned}$$

أما

$$\begin{aligned}(xD + 1)(D - 1)y &= (xD + 1)(y' - y) \\&= xDy' - xDy + y' - y \\&= xy'' - xy' + y' - y \\&= (xD^2 + (1 - x)D - 1)y\end{aligned}$$

هل لاحظت أن المتدارين مختلفين ؟

إنن نكتفي بهذا القدر أنرجل سويا لوحدة جديدة .

مسائل

الوحدة الثالثة

يند(6)

1- اكتب بشكل حدودية ثم جد التأثير على الاقتران المعطى :

- (1) $(D+x)(xD+1)$, $\sin x$
- (2) $(D-3)(2D+1)$, e^x
- (3) $(2xD+e^x)(\sin x D+x D^2)$, x^3
- (4) $(D^2+1)(\ln(x+1)D-e^x)$, x
- (5) $(D-1)(xD-x)$, 1

2- حلل إلى العوامل الأولية المؤثرات التالية :

- (1) D^2-2
- (2) $D^2-\sqrt{3}D-6$
- (3) D^3+4D^2+5D+2
- (4) D^4+1
- (5) $D^4-4D^3+D^2+6D$

3- اكتب المعادلات التالية بشكل حدودية مؤثرات :

- (1) $y''+5xy'-e^xy=0$
- (2) $y''-x^2y'+(\sin x)y=1$
- (3) $e^xy''+y'+y=x$

الوحدة الرابعة

المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية

• Linear Differential Equations Of Second Order •

في الوحدة الثالثة حاولنا معالجة حل المعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية وذات المعاملات المتغيرة . أما في هذه الوحدة فسوف نقوم بالمعالجة التامة (وليس المحاولة فقط) لحل المعادلات الخطية من المرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة سواء كانت المعادلة متجانسة أم غير متجانسة .

١- المعادلات الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة (Homogenous Equations With Constant Coefficients)

في البند الثاني من الوحدة الثالثة بينا أن المعادلة :

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

لها n من الحلول الأساسية ، لنقل y_1, y_2, \dots, y_n حول نقطة ما ، وأن الحل العام

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n \quad : \text{ هو من الشكل}$$

إن المعادلة :

$$y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

لها حلان أساسيان y_1, y_2 وأن الحل العام هو $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$

والسؤال هو كيف نجد y_1 و y_2 ؟

وللإجابة على ذلك :

أولاً نطلب منك اليقظة التامة فالأمر جد فصل وما هو بالهزل .

والآن نعيد كتابة المعادلة بطريقة المؤثر L على النحو التالي :

$$L(y) = (D^2 + a_1D + a_0)y = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

وحيث أن L هو حدودية في D من الدرجة الثانية فإنه يمكن كتابة L بالشكل :

$$L = D^2 + a_1D + a_0 = (D - r_1)(D - r_2) \quad \dots\dots\dots (2)$$

حيث r_1, r_2 هما صفرا الحدودية :

$$P(r) = r^2 + a_1r + a_0$$

وهنا لا نريد أن نتعرض لواقع r_1, r_2 هل هما حقيقيان أم مركبان ، متساويان أم غير

متساويان ؟ لكننا نريد أن نقف عند شكل L المعطى في المتساوية (2) .

نلاحظ أن $L = L_2 \circ L_1$ حيث $L_1 = D - r_1$ و $L_2 = D - r_2$. ومن خصائص حدوديات التفاضل ذات العوامل الثابتة نلاحظ أن $L = L_1 \circ L_2$ وعليه تصبح المعادلة (1) على الشكل

$$L_1 L_2 y = L_2 L_1 y = 0$$

من هذا نستنتج أن مفني L_1 فضاء جزئي من فضاء الحلول للمعادلة (1) وكذلك مفني L_2 فضاء جزئي من فضاء الحلول للمعادلة نفسها .

وعليه فإن عملية حل المعادلة (1) أصبحت هي عملية إيجاد مفني L_1 ومفني L_2 . بمعنى آخر إيجاد حلول المعادلتين $(D - r_2)y = 0$ و $(D - r_1)y = 0$. ولكن حل $(D - r_1)y = 0$ هو حل المعادلة $y' - r_1 y = 0$. ومن الوحدة الثالثة (لو مباشرة) البند الثالث نجد أن الحل الأساسي هو $y = e^{r_1 x}$. وبالمثل $y = e^{r_2 x}$ هو الحل الأساسي لـ $y' - r_2 y = 0$. وكل من هذين الحلين هو حل للمعادلة (1) .

وهنا نواجه عدة مشاكل :

- (i) ماذا لو كان $r_1 = r_2$ ؟ في هذه الحالة $e^{r_1 x} = e^{r_2 x}$. إذا كيف نجد حلا أساسيا آخر ؟
(ii) ماذا لو كان $r_1 \neq r_2$ ولكن كلاهما مركب ؟ في هذه الحالة ماذا نعني بـ $e^{r_1 x}$, $e^{r_2 x}$ ؟

لا تخف ! سوف نجيب على هذه التساؤلات إجابة شافية في البنود التالية . ولكن قبل أن نترك هذا البند نلخص فكرته الأساسية في :

لحل المعادلة $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ نجد جذور الحدودية $P(r) = r^2 + a_1 r + a_0$ ونقل أنهما r_1, r_2 . كل جذر يعطينا حلا أساسيا أميا $y_1 = e^{r_1 x}$, $y_2 = e^{r_2 x}$ مع وجود استثناء في حالة $r_1 = r_2$ أو r_1, r_2 أعداد مركبة .

إذن إذا كن $r_1 \neq r_2$ فإن هذا نلخصه في النظرية التالية :

نظرية 1.1 : لنفرض أن جذور المعادلة :
 $r^2 + ar + b = 0$ هما عدنان حقيقيان r_1, r_2 وأن $r_1 \neq r_2$.
فإن المعادلة $y'' + ay' + b = 0$ لها حلان أساسيان $y_1 = e^{r_1 x}$, $y_2 = e^{r_2 x}$ وأن الحل العام هو :
$$y_h = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

ويرهنا هذه النظرية هو ما أسلفناه في البند الأول من استخدام لمفني

$$L = (D - r_1)(D - r_2)$$

عجبا ما أسهل هذا البند وما أقصره .

وحتى نطيل من قامة هذا البند نحل لك بعض الأمثلة .

مثال (1) : حل المعادلة $y'' + 2y' - 3y = 0$.

الحل : نجد حلول المعادلة $r^2 + 2r - 3 = 0$.

وحيث أن $r^2 + 2r - 3 = (r + 3)(r - 1)$ ، فإن الحلول هي $r_1 = -3$ ، $r_2 = 1$.

وعليه $y_1 = e^{-3x}$ ، $y_2 = e^x$ ويكون بذلك الحل العام هو

$$y_h = c_1 e^{-3x} + c_2 e^x$$

هل تريد أمثلة أخرى ؟

إن نجمعك تعتقد بأن الأمر سهل لهذه الدرجة . وسوف نقفز إلى بند آخر .

مسائل

الوحدة الرابعة

بند (1)

1- حل المعادلات التفاضلية التالية :

$$(1) y'' - y' - 6y = 0$$

$$(2) y'' - y' - 2y = 0$$

$$(3) y'' - 2y' + y = 0$$

$$(4) y'' - 2y' - 8y = 0$$

$$(5) y'' + 2y' - 8y = 0$$

$$(6) y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$(7) y'' - y' - 12y = 0$$

$$(8) y'' - 9y = 0$$

$$(9) y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0)=0, y'(0)=3$$

$$(10) y'' + 2y' - 10y = 0, \quad y(0)=0, y'(0)=4$$

$$(11) y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(0)=2, y'(0)=0$$

$$(12) 12y'' + y' - y = 0, \quad y(0)=4, y'(0)=1$$

2- جد المعادلات التفاضلية الخطية التي حلها العام :

$$(a) y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$$

$$(b) y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x$$

$$(c) y = c_1 + c_2 e^{-4x}$$

$$(d) y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

2- حالة الجذور حقيقية مكررة (Repeated Roots)

ماذا لو كانت جذور المعادلة $r^2 + ar + b = 0$ مكررة ؟ إن نظرية 2.1 عاجزة عن إعطائنا حلين أساسيين إذ في هذه الحالة $y_1 = e^{ax} = e^{ax} = y_2$. وعليه لا بد من البحث عن حل آخر مستقل خطيا عن y_1 .

والجواب نجده في :

نظرية 2.1 : لنفرض أن المعادلة $r^2 + ar + b = 0$ لها حل مكرر $r_1 = r_2 = r$. فإن المعادلة $y'' + ay' + b = 0$ لها حلان أساسيان هما $y_1 = e^{ax}$ و $y_2 = xe^{ax}$ ويكون الحل العام هو $y = c_1 e^{ax} + c_2 x e^{ax}$.

البرهان : من نظرية 2.1 فإن الجذر $r = r_1$ يعطينا حلا أساسيا هو $y_1 = e^{ax}$. وحيث أن $r_2 = r_1$ فإنه لا بد من البحث عن طريقة أخرى لإيجاد y_2 . وهذه الطريقة هي استخدام نظرية 5.2 من الوحدة الثالثة والتي تعطينا قانون y_2 إذا عرفنا y_1 . وعليه فإن :

$$y_2 = y_1 \int \left(\frac{c''}{(c')^2} \right) dx$$

$$= e^{ax} \left[\int c'' \cdot e^{-2ax} dx \right]$$

$$\text{ولكن } (r - r_1)^2 = r^2 + ar + b \text{ ومنه نحصل على } a = -2r_1$$

إذن

$$y_2 = e^{ax} \left[\int e^{2ax} \cdot e^{-2ax} dx \right]$$

$$= e^{ax} \int dx = e^{ax} [x + c]$$

حيث c هو أي ثابت . وبالتالي نستطيع أن نختار $c = 0$.

$$\text{ومنه } y_2 = x e^{ax}$$

وسواء رضيت أم لم ترضى ، فإن هذا ينهي البرهان والآن إلى بعض الأمثلة .

مثال (1) : جد الحل العام للمعادلة $y'' + 2y' + y = 0$.

الحل : نجد حلول المعادلة $r^2 + 2r + 1 = 0$.

وبسهولة نلاحظ أن الحلول هي $1 = r_1 = r_2$.

إذن حسب نظرية 3.1 فإن $y_1 = e^x$ ، $y_2 = x e^x$.

ويكون الحل العام هو $y = c_1 e^x + c_2 x e^x$.

مسائل

الوحدة الرابعة

بند (2)

1- حل المعادلات التفاضلية التالية :

(1) $y'' + 2y' + y = 0$

(2) $y'' = 0$

(3) $y'' + 6y' + 9 = 0$

(4) $y'' + 10y' + 25 = 0$

(5) $y'' - \frac{1}{2}y' + \frac{1}{4}y = 0$

2- جد المعادلات التفاضلية التي حلها العام :

(1) $y = c_1 + c_2 e^x$

(2) $y = c_1 + c_2 x$

(3) $y = c_1 e^x + c_2 x e^x$

(4) $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$

3- حالة الجذور المركبة (Complex Roots)

في هذا البند نعالج حل المعادلة $y'' + ay' + b = 0$ عندما يكون جذور المعادلة

$$r^2 + ar + b = 0 \text{ جذور مركبة .}$$

وحتى نستطيع أن نستوعب الفكرة الرئيسية لمثل هذه الحالة نذكرك أولاً بأنه إذا كان $z = \alpha + i\beta$ هو جذر للمعادلة $r^2 + ar + b = 0$ فإن $\bar{z} = \alpha - i\beta$ هو الحل الآخر

لتلك المعادلة . وإذا أردنا أن نبنى نظرية 2.1 في شكل الطين الأساسيين ، فسيكون

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} , y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} . \text{ وإذا فرضنا أن قوانين الأسس صالحة للأعداد المركبة}$$

$$\text{كما هي للأعداد الحقيقية فإن } y_1 = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} \text{ و } y_2 = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} .$$

ويبقى علينا أن نفهم : ماذا نعني بـ $e^{i\beta x}$ ؟

هل تذكر منشور متسلسلة قوى الاقتران الأسّي ؟

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots \quad \text{إنه :}$$

ومنه نقول : إذا كان $\theta \in \mathbb{R}$ فإننا نكتب :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \dots \\ &= \left(1 - \theta^2 + \frac{\theta^4}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \dots \right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right) \\ &= \cos \theta + i \sin \theta \end{aligned}$$

وهذا القانون :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

يسمى قانون أويلر . من هنا نستنتج أن :

$$y_2 = e^{\alpha x} [\cos \beta x - i \sin \beta x] , y_1 = e^{\alpha x} [\cos \beta x + i \sin \beta x]$$

وحيث أننا نتعامل مع اقترانات حقيقية فإننا نلخص الأفكار في :

نظرية 3.1 : لنفرض أن المعادلة $r^2 + ar + b = 0$ لها حلان
 $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$. فإن المعادلة $y'' + ay' + by = 0$ لها حلان أساسيان
 هما $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ ، ويكون الحل العام هو :
 $y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$

هل تريد مثالا . لن نبخل عليك بذلك .

مثال (1) : حل المعادلة $y'' + 2y' + 5y = 0$.

الحل : نجد حلول المعادلة $r^2 + 2r + 5 = 0$

والتي هي :

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 5}}{2}$$

$$= -1 \pm 2i$$

وعليه فإن $y_1 = e^{-x} \cos 2x$, $y_2 = e^{-x} \sin 2x$.

ألا ترى سهولة الأمر . ولكن كن حذرا ، فإنا نسحب بك أكثر فلكثر إلى عمق بحر المعادلات .

مسائل

الوحدة الرابعة

بند (3)

1- حل المعادلات التفاضلية التالية :

(1) $9y'' + y = 0$

(2) $y'' + 2y' + 5y = 0$

(3) $y'' + 16y = 0$

(4) $y'' + 4y' + 2y = 0$

(5) $y'' + 2y' + 4y = 0$

(6) $6y'' + y' - y = 0$

2- جد المعادلات التفاضلية الخطية التي حلها العام :

(1) $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$

(2) $y = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x$

(3) $y = c_1 e^{-2x} \cos 3x + c_2 e^{-2x} \sin 3x$

(4) $y = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x$

(5) $y = c_1 e^{3x} \cos 3x + c_2 e^{3x} \sin 3x$

4- الحلول الخاصة : مبدأ التراكب ("Super position") (Particular Solutions)

لنأخذ المعادلة :

$$y'' + ay' + by = f(x) \dots\dots\dots(1)$$

في البند الثاني من الوحدة الثالثة قمنا بدراسة شكل الحل العام وشروط وجوده لمثل تلك المعادلة ولنتيحنا إلى النتيجة أن $y_s = y_h + y_p$ حيث y_h هو الحل العام ، y_p هو الحل العام للمعادلة $y'' + ay' + by = 0$.
أما في البنود السابقة لهذه الوحدة ، فقد قمنا بدراسة عملية إيجاد y_h للمعادلة (1). والغاية الآن هو إيجاد y_p .

وفي هذا البند نمطي ملاحظات عامة حول y_p .
أولاً نذكر أن المعادلة (1) يمكن كتابتها بالشكل $L(y) = f$ حيث $L = D^2 + aD + b$.
فلذا كان y_p هو حل خاص للمعادلة (1) ، فإن $L(y_p) = f$.
والآن إلى النظرية التالية :

نظرية 4.1 : إذا كان y_{p1} حلاً خاصاً للمعادلة $L(y) = f_1$ وكان y_{p2} حلاً خاصاً للمعادلة $L(y) = f_2$ ، فإن $y_{p1} + y_{p2}$ حل خاص للمعادلة $L(y) = f_1 + f_2$.

البهتان :

$$\begin{aligned} L(y_{p1} + y_{p2}) &= L(y_{p1}) + L(y_{p2}) \\ &= f_1 + f_2 \end{aligned}$$

ويتمى بذلك البرهان .

هل رأيت في حياتك براهانا أقصر من هذا ؟ .
والآن إلى ملاحظة أخرى على شكل نظرية ثم نتبع ذلك بعض الأمثلة .

نظرية 4.2 : إذا كان y_p حلاً خاصاً للمعادلة $L(y) = f$ ، فإن ky_p حلاً خاصاً للمعادلة $L(y) = kf$.

البهتان :

$$L(ky_p) = kL(y_p) = kf$$

وتم البرهان بحمد الله .

والآن إلى بعض الأمثلة .

مثال (1) : لنفرض $L = D^2 - D + 1$. إذا كان $y_1 = \cos x$ حلاً للمعادلة $L(y) = \sin x$ وكان $y_2 = \frac{e^{2x}}{3}$ حلاً للمعادلة $L(y) = e^{2x}$. جد حلاً لكل من المعادلات التالية :

$$(i) \quad L(y) = \sin x - 3e^{2x}$$

$$(ii) \quad L(y) = 4\sin x + 18e^{2x}$$

الحل : (i) هنا $f = f_1 + f_2$ حيث $f_1(x) = \sin x$ و $f_2(x) = -3e^{2x}$.

ومن المعطيات نعرف أن $L(\cos x) = f_1$. وحيث أن $L(y_2) = e^{2x}$ فإنه وفق نظرية 5.2 فإن $L(-3y_2) = -3e^{2x}$ ، إذن $L(-3y_2) = f_2$. والآن نستخدم نظرية 4.1 لنحصل على $L(y_1 - 3y_2) = f_1 + f_2$.

إذن الحل المطلوب هو :

$$y = \cos x - 3\frac{e^{2x}}{3} = \cos x - e^{2x}$$

(ii) هنا $L(y) = f$ بحيث $f = f_1 + f_2$ حيث $f_1(x) = 4\sin x$ و $f_2(x) = 18e^{2x}$.

ولكن $L(y_1) = \sin x$ فإن $L(4y_1) = 4\sin x$ ،

وكذلك $L(y_2) = e^{2x}$ يعطي $L(18y_2) = 18e^{2x}$ ،

وعليه

$$L(4y_1 + 18y_2) = 4\sin x + 18e^{2x}$$

إذن الحل المطلوب هو :

$$y = 4\cos x + \frac{18e^{2x}}{3} = 4\cos x + 6e^{2x}$$

والسؤال الذي يطرح نفسه هو " كيف يمكن لنا أن نجد حلاً ، خاصة لمعادلة غير متجانسة من

الشكل $L(y) = f$ ؟ "

والجواب نضعه لك في البنود التالية .

مسائل

الوحدة الرابعة

بند (4)

1- جد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية إذا كان الحل الخاص كما هو معطى :

(1) $y'' - y = x$, $y_p = -x$

(2) $y'' + y' = 1$, $y_p = x$

(3) $y'' - y' - 2y = 1 - 2x$, $y_p = x - 1$

(4) $y'' - 4y' + 3y = -2e^x$, $y_p = xe^x$

(5) $y'' + 2y' - 4y - 4\cos 2x = 0$, $y_p = \sin 2x$

2- إذا كان $y_1 = \cos x$ حلاً للمعادلة $y'' - y' + y = \sin x$ ، وكان $y_2 = \frac{e^{2x}}{3}$ حلاً

للمعادلة $y'' - y' + y = e^{2x}$. جد الحل العام للمعادلات التالية :

(1) $y'' - y' + y = 5 \sin x$

(2) $y'' - y' + y = \sin x - 3e^{2x}$

(3) $y'' - y' + y = 4 \sin x + 18e^{2x}$

5- المعاملات غير المعينة (Undetermined Coefficients)

في هذا البند نوضح الطريقة الأولى لإيجاد y_p للمعادلة $L(y) = f$.
هذه الطريقة صالحة فقط لأنواع معينة من الاقترانات f .
وانواع الاقترانات f الصالحة لمثل هذه الطريقة يمكن حصرها على النحو التالي :

طريقة المعاملات غير المعينة صالحة للاقترانات f والتي من الشكل :

$$f(x) = \sum_0^k a_k x^k, f(x) = be^{mx}, f(x) = a \sin bx, f(x) = a \cos bx$$

أو أي اقتران تحصل عليه من هذه الاقترانات سواء عن طريق الجمع أو الضرب .

مثال (1) : عين أي الاقترانات التي تصلح لطريقة المعاملات غير المعينة :

$$f(x) = 3e^x \sin 2x + 1 \quad (i)$$

$$f(x) = xe^{2x} \cos 3x + x^2 - 3 \quad (ii)$$

$$f(x) = 1 + x + 2x^2 - \sec x \quad (iii)$$

الحل : (i) نلاحظ أن $f(x) = f_1 + f_2$ حيث f_1 حدودية و f_2 هو حاصل ضرب

اقتارين من النوع المطلوب . وعليه فإن f يصلح لطريقة المعاملات غير المعينة .

(ii) هنا أيضا حصلنا عليه من الأنواع الصالحة بالضرب والجمع . ولذلك فإن f يصلح

لطريقة المعاملات غير المعينة .

(iii) هنا f لا يصلح لطريقة المعاملات غير المعينة لأن أحد مركباته : $\sec x$ ، ليس من

الأنواع الصالحة ولا نستطيع أن نحصل عليه من الأنواع الصالحة لا بضرب ولا بجمع .

والآن كيف نحصل على y_p بطريقة المعاملات غير المعينة للمعادلة $L(y) = f$.

والفكرة الأساسية لطريقة إيجاد y_p هو أنه :

إذا كانت f حدودية فإن الاقتران الذي يؤثر عليه L لنحصل على حدودية يجب أن يكون

حدودية . وكذلك إذا كان f اقترانا أسيا أو $\sin ax$ أو $\cos ax$ فإن الاقتران الذي يؤثر

عليه L يجب أن يكون من نوع f ليخرج لدينا f .

والآن إلى التفاصيل . حيث سنعالج كل حالة على حدة ، فلنبدأ إذن .

الحالة الأولى : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

قبل وضع شكل y_p ، لا بد من حل المعادلة $L(y) = 0$. فنجد الحلين الأساسيين y_1 و y_2 .
والآن :

اللمعة (1) : إذا كان $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ، فإن
 $y_p = x^s (b_s x^s + \dots + b_1 x + b_0)$ حيث s هو أصغر عدد طبيعي بحيث لا يوجد حد
 من حدود y_p يساوي y_1 أو يساوي y_2 .

أما كيف نجد $b_0, b_1, \dots, b_{s-1}, b_s$ ، فإننا نعوض y_p في المعادلة $L(y_p) = f$. هذا التعويض يعطينا حدوديتين متساويتين وبالتالي فإن المعاملات متساوية .
 وإليك المثال التالي المبين لذلك الأمر :

مثال (2) : جد y_p للمعادلة $y'' - 2y' - 3y = x^2 - 3$.

الحل : أولاً نجد الحلين الأساسيين للمعادلة $y'' - 2y' + 3y = 0$:
 المعادلة : $r^2 - 2r - 3 = 0$ لها حلان $r_1 = 3$ و $r_2 = -1$.
 وعليه $y_1 = e^{3x}$ و $y_2 = e^{-x}$.
 حيث إن $f(x) = x^2 - 3$ ، فإن :
 $y_p = x^s (b_0 + b_1 x + b_2 x^2)$

ونلاحظ هنا عدم تشابه الحدود الأساسية مع الحدوديات عامة فإننا نختار $s = 0$ ، ويكون
 $y_p = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$

نعوض في المعادلة $L(y) = f$ لنحصل على :
 $y_p'' - 2y_p' + 3y_p = x^2 - 3$

ومنه

$$2b_2 - 2(b_1 + 2b_2 x) + 3(b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = x^2 - 3$$

أي :

$$(2b_2 - 2b_1 + 3b_0) + (3b_1 - 4b_2)x + 3b_2 x^2 = x^2 - 3$$

والآن نساوي المعاملات لنحصل على :

$$2b_2 - 2b_1 + 3b_0 = -3$$

$$3b_1 - 4b_2 = 0$$

$$3b_2 = 1$$

$$b_0 = \frac{-25}{9}, \quad b_1 = \frac{4}{9}, \quad b_2 = \frac{1}{3} \quad \text{ومنه}$$

$$y_p = \frac{-25}{9} + \frac{4}{9}x + \frac{1}{3}x^2 \quad \text{إذن}$$

الحالة الثانية : $f(x) = ae^{bx}$

وفي هذه الحالة كالحالة السابقة يكون $y_p = \lambda x^2 e^{bx}$

حيث λ ثابت يراد تعيينه و s هو أصغر عدد طبيعي لا يوجد تشابه بين y_p والحلول

الأساسية لـ $L(y) = 0$.

ونعرض عليكم المثال التالي :

مثال (3) : جد y_p للمعادلة $y'' + y' = 3e^{-x}$.

الحل : نجد أولاً y_1, y_2 . وحيث أن حلول المعادلة $r^2 + r = 0$ هي $r = 0$ ،

$r = -1$ ، فإن $y_1 = e^{0x} = 1$ ، $y_2 = e^{-x}$.

والآن $y_p = \lambda x e^{-x}$ فلذا أخذنا $s = 0$ ، فإن y_p يشابه y_2 (أي أن $y_p = \lambda y_2$) .

وإذا اخترنا $s = 1$ ، فإن y_p لا يشابه لياً من الحلول الأساسية .

وعليه $y_p = \lambda x^2 e^{-x}$. نعوض الآن في المعادلة لنحصل على :

$$y_p'' + y_p' = 3e^{-x}$$

ومنه

$$\lambda[-2e^{-x} + xe^{-x}] + \lambda[e^{-x} - xe^{-x}] = 3e^{-x}$$

نبسط لنحصل على

$$-\lambda e^{-x} = 3e^{-x}$$

وعليه $-\lambda = 3$. ويكون بذلك $y_p = 3e^{-x}$.

الحالة الثالثة : $f(x) = a \sin bx$

هذه الحالة تشمل أيضاً فيما إذا كان $f(x) = a \cos bx$ ، إذ أن الفكرة واحدة وشكل y_p واحد.

في مثل هذه الحالة يكون

$$y_p = x^s(c_1 \sin bx + c_2 \cos bx)$$

حيث نختار s بحيث لا تشابه بين حدود y_p وأي من y_1 أو y_2 ويكون s أصغر عدد طبيعي يحقق ذلك .
ولنأخذ مثالا يبين ذلك :

مثال (4) : جد y_p للمعادلة $y'' - y = 10\cos 2x$.

الحل : حسب الحالة الثالثة فإن شكل y_p هو :

$$y_p = x^s (a \cos 2x + b \sin 2x)$$

حيث a, b ثوابت يراد تعيينها . أما s فبنا نختارها بحيث لا تشابه بين حدود y_p والحلول الأساسية لـ $L(y) = 0$.

وفي حالتنا : $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^x$. وعليه إذن $s = 0$ ،

$$y_p = a \cos 2x + b \sin 2x \quad \text{إذن}$$

نعرض لنحصل على :

$$y_p'' - y_p = 10\cos 2x$$

إذن

$$(-4a \cos 2x - 4b \sin 2x) - (a \cos 2x + b \sin 2x) = 10\cos 2x$$

تبسط لنحصل على :

$$-5a \cos 2x - 5b \sin 2x = 10\cos 2x$$

نساوي المعاملات المتقابلة لنحصل على : $-5a = 10$ ، $-5b = 0$

إذن $a = -2$ ، $b = 0$.

ومنه $y_p = -2\cos 2x$.

والآن إلى الحالة العامة :

$$f(x) = p(x)e^{ax} \cos bx + q(x)e^{ax} \sin bx \quad \text{الحالة العامة :}$$

حيث p, q حدوديات في x .

في هذه الحالة يكون y_p من الشكل :

$$y_p = x^q e^{ax} \left\{ (a_0 x^p + \dots + a_1 x + a_0) \cos bx + (b_0 x^p + \dots + b_1 x + b_0) \sin bx \right\}$$

حيث n هو أعلى الدرجتين للحدويتين q, p أما s فهو ضابط عدم التشابه كما سلف في الحالات السابقة . والعوامل $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p$ يراد تعيينها ، ويتم ذلك عن طريق التعويض في $L(y) = f$ ، ثم تساوي معاملات الاقترانات المتشابهة على طرفي المعادلة .

ولنأخذ الآن مثالا عاما :

مثال (5) : جد شكل y_p للمعادلات التالية :

$$(i) \quad y'' - 4y' + 4y = 2xe^{2x} + x^2 \sin x$$

$$(ii) \quad (D^2 + 2D + 2)y = 3xe^{-2x} \cos 5x$$

الحل : (i) هنا $f = f_1 + f_2$ وعليه وفق قاعدة التراكب فإن $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$. ولإيجاد شكل y_{p_1}, y_{p_2} ، لا بد من إيجاد y_1, y_2 ، الحلول الأساسية للمعادلة $L(y) = 0$. وحيث أن $r^2 - 4r + 4 = 0$ لها الحلان $r_1 = r_2 = 2$ ، فإن $y_1 = e^{2x}$ و $y_2 = xe^{2x}$.

والآن $f_1(x) = 2xe^{2x}$ ، وعليه يكون شكل y_{p_1} هو :

$$y_{p_1} = x^s(ax + b)e^{2x} . \text{ ونريد تعيين } s \text{ لضمان عدم التشابه .}$$

نلاحظ هنا أن $s = 1, s = 0$ تعطيان تشابه بين حدود y_{p_1} وبين الحلول الأساسية : إذ أن

$$s = 0 \text{ يعطينا } y_{p_1} = ax^2e^{2x} + bxe^{2x} \text{ وهو ليس سوى } ay_2 + by_1 .$$

وكذلك $s = 1$ يعطينا $y_{p_1} = ax^2e^{2x} + bxe^{2x}$ ، فيكون الحد الثاني من y_{p_1} مشابه للحل

y_2 . أما $s = 2$ فإنه يعطينا $y_{p_1} = ax^3e^{2x} + bx^2e^{2x}$ ولا تشابه مع الحلول الأساسية

وعليه فإن شكل y_{p_1} هو : $y_{p_1} = x^2(ax + b)e^{2x}$.

نعد الآن إلى f_2 . حيث أن $f_2 = x^2 \sin x$ ، فإن :

$$y_{p_2} = x^s(ax^2 + bx + c)(d \sin x + e \cos x)$$

أما s فإن وجود $\sin x$ و $\cos x$ ألغى وجود تشابه بين حدود y_{p_2} وبين الحلول الأساسية

والتي هي اقترانات أسية . وعليه $s = 0$ ويكون شكل y_{p_2} النهائي هو :

$$y_{p_2} = (ax^2 + bx + c)(d \sin x + e \cos x)$$

والذي يمكن إعادة كتابته بالشكل:

$$y_p = (a_1 x^2 + b_1 x + c_1) \sin x + (a_2 x^2 + b_2 x + c_2) \cos x$$

ويكون الحل النهائي هو :

$$y_p = y_{p1} + y_{p2}$$

(ii) لولا نجد الحلول الأساسية للمعادلة $L(y) = 0$

والمعادلة $r^2 + 2r + 2 = 0$ لها الحلان :

$$r_1 = \frac{-2 + \sqrt{4 - 8}}{2}, \quad r_2 = \frac{-2 - \sqrt{4 - 8}}{2}$$

أي أن $r_1 = -1 + i$, $r_2 = -1 - i$

• إذن $y_2 = e^{-x} \sin x$ و $y_1 = e^{-x} \cos x$

والآن $f = 3x e^{-2x} \cos x$ ومنه نحصل على شكل y_p على النحو التالي :

$$y_p = x^2 (a_1 x + b_1) e^{-2x} (a_2 \cos 5x + b_2 \sin 5x)$$

ونلاحظ أن $s = 0$ يعطينا عدم التشابه بين أي من حدود y_p وبين f وعليه وبعد إعادة

الصياغة يمكن كتابة y_p على النحو :

$$y_p = (c_1 x + c_2) e^{-2x} \cos 5x + (c_3 x + c_4) e^{-2x} \sin 5x$$

با له من مثال طويل . اتبعنا وأتبعك .

اتبعنا كتابة وأتبعك قراءة . إذن لننه هذا أتبند بسلام وننتقل إلى بند آخر .

مسائل

الوحدة الرابعة

بند (5)

1- حل المعادلات التفاضلية التالية (الحل العام) :

$$(1) y'' + 2y' + y = 5 + x$$

$$(2) 3y'' + 2y' - y = 2\sin x$$

$$(3) y'' + y = \cos x$$

$$(4) 4y'' + 3y' - y = 25 - x^2$$

$$(5) y'' + 6y' + 10y = 80e^x \sin x$$

$$(6) y'' - y' + 2y = x^2 - 8e^{2x}$$

$$(7) 9y'' - y = x \sin x$$

$$(8) y'' + y' - 6y = 8(x + 1)$$

$$(9) y'' + y' = 2x + 3e^x$$

$$(10) y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(1 + \sin 2x)$$

2- جد شكل الحل الخاص للمعادلات التالية :

$$(1) y'' - 4y' + 4y = x(2e^{2x} + x \sin x)$$

$$(2) y'' + 2y' + 2y = x^2 - 3xe^{2x} \cos 5x$$

$$(3) y'' + y = \sin x + x \cos x + 10^x$$

$$(4) y'' - y' = e^{2x} + xe^{2x} + x^2 e^{2x}$$

$$(5) y'' - y' - 2y = e^x \cos x - x^2 + x + 1$$

7- طريقة تغير الوسطاء (Variation Of Parameters)

في هذا البند مسألة لإيجاد y_p للمعادلة :

$$y'' + ay' + by = f \quad \dots\dots(1)$$

بطريقة لا يتقدها شكل f . وملخص هذه الطريقة :

<p>(1) نجد للحل $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ حيث c_1, c_2 هي ثوابت عامة .</p> <p>(2) نضع $y_p = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$. فجعلنا بذلك y_p له شكل y_h سوى أن العوامل c_1, c_2 هي الآن لفرقات في x . وهذا ما يفسر الاسم " تغير الوسطاء " .</p> <p>(3) نعوض : $y_p'' + a y_p' + b y_p = f$</p> <p>ونضع شروطا لنحصل على معادلتين في $c_1'(x), c_2'(x)$.</p> <p>(4) نجد قيم c_1, c_2 التي تحقق المعادلتين . وبذلك نجد y_p .</p>
--

والآن إلى تفاصيل العملية كي نخرج لك قانونا جاهزا جميلًا لإيجاد y_p . فإلى ذلك ندعوك .

نضع $y_p = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$ ثم عوض في المعادلة الرئيسية :

$$y'' + a y' + b y = f \quad \text{، لنحصل على :}$$

$$c_1(y_1'' + a y_1' + b y_1) + c_2(y_2'' + a y_2' + b y_2) + (c_1' y_1 + c_2' y_2)' + a(c_1' y_1 + c_2' y_2) + (c_1 y_1' + c_2 y_2') = f \quad \dots\dots(2)$$

وحيث أن y_1, y_2 هما حلان للمعادلة (1) ، فإن المعادلة (2) تصبح :

$$(c_1' y_1 + c_2' y_2)' + a(c_1' y_1 + c_2' y_2) + (c_1 y_1' + c_2 y_2') = f \quad \dots\dots(3)$$

والمعادلة (3) تتحقق فيما لو اخترنا :

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$$

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = f$$

هاتان معادلتان بمجهولين : c_1', c_2' . نحلها لنحصل على :

$$c_2' = \frac{y_1(x) f}{W[y_1, y_2](x)} \quad , \quad c_1' = -\frac{y_2(x) f}{W[y_1, y_2](x)}$$

ومنه

$$c_2 = \int_{x_0}^x \frac{f(t) y_1(t)}{W[y_1, y_2](t)} dt \quad , \quad c_1 = - \int_{x_0}^x \frac{f(t) y_2(t)}{W[y_1, y_2](t)} dt$$

وعليه

$$y_p = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$$

ومنه

$$y_p = \int_{x_0}^x K(x,t) f(t) dt \quad \dots\dots\dots (4)$$

حيث

$$K(x,t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} \quad \dots\dots\dots (5)$$

والاقتزان $K(x,t)$ يسمى " الاقتران جرين " .

هل تلاحظ أن الحل الذي أوجدناه يحقق الشروط $y_p(x_0) = y_p'(x_0) = 0$ ؟ تحقق من ذلك

بنفسك .

والآن إلى بعض الأمثلة .

مثال (1) : جد الحل العام للمعادلة $y'' + y' = \tan x$

الحل : نجد أولاً y_h :

$r^2 + 1 = 0$ لها حلان $r_1 = i$, $r_2 = -i$ ، وعليه فإن $y_h = c_1 \sin x + c_2 \cos x$.

ولإيجاد y_p نستخدم القانون (4) :

$$y_p = \int_{x_0}^x K(x,t) \tan t \, dt$$

إننا نجد $K(x,t)$ حسب القانون (5) . وعليه

$$K(x,t) = \frac{\begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix}} = \sin(x-t)$$

وعليه

$$y_p = \int_{x_0}^x \sin(x-t) \tan t \, dt$$

وباختيار $x_0 = 0$ نحصل على :

$$y_p = \sin x - \cos x \ln |\sec x + \tan x|$$

وبذلك يكون

$$y_g = y_h + y_p$$

$$= c_1 \sin x + c_2 \cos x + \sin x - \cos x \ln |\sec x + \tan x|$$

$$\text{مثال (2) : جد الحل العام للمعادلة } y'' - 3y' + 2y = -\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

الحل : نجد أولاً y_h :

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \text{ فإن } r_1=2, r_2=1 \text{ ولعليه فإن } r^2 - 3r + 2 = 0$$

إذن :

$$y_p = \int_{x_0}^x K(x,t) \frac{-e^{2t}}{1+e^{2t}} dt$$

حيث

$$K(x,t) = \frac{\begin{vmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^x & e^{2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^1 & e^{21} \end{vmatrix}}$$

$$K(x,t) = (e^{t+2x} - e^{x+2t}) \cdot e^{-3t}$$

إذن

ومنه نحصل على

$$y_g = c^1 \ln(e^x + 1) + e^{2x} \ln(e^{-x} + 1)$$

وبالتالي :

$$y_g = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^x \ln(e^x + 1) + e^{2x} \ln(e^{-x} + 1)$$

ليكنيك هذه الأمثلة ؟ إذن لا مزيد .

ونكون هذه نهاية الوحدة الرابعة ، لننتقل بعدها إلى وحدة جديدة .

مسائل

الوحدة الرابعة

بند (6)

1- جد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية :

$$(1) y'' + y = \sec x$$

$$(2) y'' - y' - 2y = e^{-x} \sin x$$

$$(3) y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$$

$$(4) 4y'' - 8y' + 5y = e^x \tan^2 \frac{x}{2}$$

$$(5) 4y'' + 4y' + y = xe^{\frac{x}{2}} \sin x$$

$$(6) y'' + 4y = \frac{e^{2x}}{2}$$

$$(7) y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$$

$$(8) y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$$

$$(9) y'' + 4y = \operatorname{cosec}^2 2x$$

$$(10) y'' + 9y = \sec^2 3x$$

$$(11) y'' + y = \tan^2 x$$

$$(12) y'' + 2y' + y = e^{-x}$$

$$(13) y'' + 4y = \tan 2x$$

$$(14) y'' + y = \tan x + e^{3x} - 1$$

الوحدة الخامسة

المعادلات الخطية من المراتب العليا

• Higher Order Linear Equation •

لا يوجد أفكار جديدة في هذه الوحدة ولكن حسابات جديدة من حيث طولها لا من حيث

فكرتها . فلا زلنا نريد أن نجد الحل العام للمعادلة :

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f$$

فالأفكار هي نفس أفكار الوحدة الرابعة . وحتى لا يطول بك الشوق دعنا نمخر عباب بحر هذه الوحدة .

1- ملاحظات عامة (General Remarks)

التضحية كلها هو أننا نريد الحل العام أو حلا يحقق شروطا أولية للمعادلة :

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f \quad (1)$$

وعادة السؤال الأول في هذا الخصوص هل هناك مثل هذا الحل ؟ والجواب :

نظرية 1.1 : لنفرض أن $a_0, f, a_1, \dots, a_{n-1}$ هي القتران متصلة على الفترة (a, b) والتي تحوي النقطة x_0 ، فإن للمعادلة (1) لها حل وحيد يحقق الشروط :
 $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$
 حيث y_0, y_1, \dots, y_{n-1} هي أعداد حقيقية .

إن إذا كانت العوامل a_0, a_1, \dots, a_{n-1} ثوابنا ، وكان f متصلا في مجال ما فهناك حل للمعادلة (1) يحقق شروطا أولية ما .

لما بالنسبة للحل العام للمعادلة (1) ، فإن الفكرة لا تخرج عن فكرة الوحدة الرابعة :

الحل العام للمعادلة ذات العوامل الثابتة :

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f$$

هو $y_g = y_h + y_p$

حيث y_h هو الحل العام للمعادلة $L(y) = 0$ ، و y_p هو حل خاص للمعادلة $L(y) = f$.

أما كيف نجد y_h, y_p فهنا أيضا لا جديد في الموضوع : نفس خطوات إيجاد y_h, y_p والتي سبق شرحها في الوحدة الرابعة للمعادلة $y'' + ay' + by = f$. والفرق هنا عدداً الجذور ومرات التكرار .

إن نترك هذا البلد ونذهب لبنود التفصيل لهذه القواعد .

مسائل

الوحدة الخامسة

بند (1)

1- ما هي أكبر فترة يمكن تطبيق نظرية 1.1 عليها :

$$(1) \quad xy''' - 3y' + e^x y = x^2 - 1, \quad y(-2) = 1, y'(-2) = 0, y''(-2) = 2$$

$$(2) \quad y''' - \sqrt{x} y = \sin x, \quad y(\pi) = 0, y'(\pi) = 11, y''(\pi) = 3$$

$$(3) \quad y''' - y'' + \sqrt{x-1} y = \tan x, \quad y(5) = y'(5) = y''(5) = 1$$

$$(4) \quad x(x+1)y''' - 3xy' + y = 0, \quad y\left(-\frac{1}{2}\right) = 1, y'\left(-\frac{1}{2}\right) = y''\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$(5) \quad x\sqrt{x+1}y''' - y' + xy = 0, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = y'\left(\frac{1}{2}\right) = -1, y''\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$(6) \quad (x^2 - 1)y''' + e^x y = \ln x, \quad y\left(\frac{3}{4}\right) = 1, y'\left(\frac{3}{4}\right) = y''\left(\frac{3}{4}\right) = 0$$

2- برهن أن الافتراضات التالية تشكل الحلول الأساسية للمعادلات المقابلة :

$$(1) \quad y''' + 2y'' - 11y' - 12y = 0, \quad \{e^{3x}, e^{-x}, e^{-4x}\}$$

$$(2) \quad y''' - y'' + 4y' - 4y = 0, \quad \{e^x, \cos 2x, \sin 2x\}$$

$$(3) \quad x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6x y' - 6y = 0, \quad \{x, x^2, x^3\}$$

$$(4) \quad y^{(4)} - y = 0, \quad \{e^x, e^{-x}, \cos x, \sin x\}$$

2- إيجاد Y_h (Homogeneous Solution)

نعد الآن للمعادلة

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (1)$$

$$L = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0I \quad \text{حيث}$$

نجد Y_h نقوم بإيجاد حلول :

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0 = 0 \quad (2)$$

ولنفرض أن هذه الحلول هي r_1, r_2, \dots, r_n .

ولأن عددها يفوق الإثنين فإن هذه الحلول يمكن أن تكون خليطاً من الحلول الحقيقية والمركبة. بالإضافة إلى احتمال التكرار . وإليك التفاصيل في إيجاد Y_h .

1- كل حل لمعادلة (2) يعطي حلاً أساسياً لمعادلة (1) إن كان حقيقياً وحليين أساسيين إن كان مركباً .

2- كل حل حقيقي للمعادلة (2) مكرر k من المرات يطينا k من الحلول الأساسية للمعادلة (1) .

3- إذا كان $r = r_1$ حلاً حقيقياً مكرراً k من المرات فإن الحلول الأساسية المتعلقة به هي :

$$y_1 = e^{r_1x}, y_2 = x e^{r_1x}, \dots, y_k = x^{k-1} e^{r_1x}$$

وكذلك الأمر بالنسبة لأي حل حقيقي مكرر .

4- الحل المركب للمعادلة (2) يعطي حلين أساسيين للمعادلة (1) ومراقبه يعطي نفس الحلين .

5- إذا كان $r = a + ib$ حلاً مركباً مكرراً k من المرات فإن الحلول الأساسية المتعلقة به هي:

$$y_1 = e^{ax} \cos bx, y_2 = x e^{ax} \cos bx, \dots, y_k = x^{k-1} e^{ax} \cos bx$$

$$y_{k+1} = e^{ax} \sin bx, \dots, y_{2k} = x^{k-1} e^{ax} \sin bx$$

والآن إلى أمثلة توضح ذلك كله .

مثال (1) : جد Y_h للمعادلة $(D+1)^2(D^2+1)(D-1)y = 0$.

الحل : نجد أولاً حلول

$$(r+1)^2(r^2+1)(r-1) = 0$$

والتي هي :

$$r_1 = -1, r_2 = -1, r_3 = i, r_4 = i, r_5 = -i, r_6 = -i, r_7 = 1$$

إن

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 x \cos x + c_5 \sin x + c_6 x \sin x + c_7 e^x$$

مثال (2) : جد y_h للمعادلة $[D^3(D+1)]^4(D^2+1)^2(D^4-1)y=0$

الحل : لاحظ أن هذه المعادلة من الرتبة 24 .

$$[r^3(r+1)]^4(r^2+1)^2(r^4-1)=0$$

نقسم إلى الشكل

$$r^{12}(r+1)^4(r^2+1)^2(r^2+1)(r-1)(r+1)=0$$

وعليه

$$r^{12}(r+1)^4(r^2+1)^3(r-1)=0$$

فالحلول إن هي :

صفر مكرر 12 مرة

-1 مكرر 5 مرات

i مكرر 3 مرات

-i مكرر 3 مرات

1 غير مكرر .

وعليه يكون

$$y_h = \sum_{i=0}^{11} c_i x^i + \sum_{i=0}^4 a_i x^i e^{-x} + \sum_{i=0}^2 b_i x^i \cos x + \sum_{i=0}^2 d_i x^i \sin x + \alpha e^x$$

وكما لاحظت فأنه لا جديد في فكرة إيجاد y_h على ما سلف في الوحدة الرابعة .

والآن إلى بند آخر .

مسائل

للوحدة الخامسة

هنا (2)

1- حل المعادلات التفاضلية التالية (الحل العام) :

$$(1) y''' + 3y'' - y' - 3y = 0$$

$$(2) y''' + 5y'' - 8y' - 12y = 0$$

$$(3) 4y''' + 12y'' + 9y' = 0$$

$$(4) y''' + 6y'' + 13y' = 0$$

$$(5) 2y''' + y'' - 8y' - 4y = 0$$

$$(6) y''' + 3y'' + y' + 3y = 0$$

$$(7) y^{(iv)} - y'' = 0$$

$$(8) y^{(iv)} - 8y'' + 16y = 0$$

$$(9) y^{(iv)} + 18y'' + 81y = 0$$

$$(10) 4y^{(iv)} - 8y''' - y'' + 2y' = 0$$

$$(11) y^{(iv)} + y''' + y'' = 0$$

$$(12) y^{(iv)} = 0$$

$$(13) y^{(iv)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$$

$$(14) y^{(iv)} + 2y''' + y' = 0$$

$$(15) y^{(iv)} + y = 0$$

2- جد المعادلة التفاضلية الخطية التي حلها العام :

$$(1) y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x}$$

$$(2) y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 x e^x + c_4 \cos x + c_5 \sin x$$

$$(3) y = (c_1 + c_2 x) \sin x + (c_3 + c_4 x) \cos x$$

$$(4) y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x} + c_3 x e^{4x} + c_4 x^2 e^{4x}$$

3- طريق العوامل غير المعينة (Undetermined Coefficients)

نكرر كلامنا هنا ونقول لا جديد في هذا الموضوع سوى كثرة الحلول الأساسية والتي يجب مقارنتها مع شكل y_p بحيث نمنع للتشابه بين حدود y_p وبين أي من الحلول الأساسية لـ :
 $L(y) = 0$
 وشكل y_p يعتمد في الأساس على f في المعادلة $L(y) = f$. وقاعدة شكله هي نفس قاعدة الحالة العامة من البند السادس في الوحدة الرابعة .

والآن إلى بعض الأمثلة .

مثال (1) : جد شكل y_p للمعادلة $(D^2 - 2D + 1)(D^2 - 4)y = x \sinh x + \cosh 2x$.

الحل : أولاً نجد مجموعة الحلول الأساسية للمعادلة $L(y) = 0$. ونحل

$$(r^2 - 2r + 1)(r^2 - 4)^2 = 0$$

نجد أن مجموعة الحلول الأساسية هي :

$$\{e^x, xe^x, e^{2x}, xe^{2x}, e^{-2x}, xe^{-2x}\}$$

أما f فهو :

$$f(x) = x \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) + \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$= \left(\frac{x+1}{2} \right) e^x + \left(\frac{1-x}{2} \right) e^{-x}$$

$$\text{وعليه } f = f_1 + f_2 \text{ حيث } f_1 = \left(\frac{x+1}{2} \right) e^x, f_2 = \left(\frac{1-x}{2} \right) e^{-x}$$

ومنه $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ ، حيث

$$y_{p_1} = x^*(a_1x + b_1)e^x$$

$$y_{p_2} = x^*(a_2x + b_2)e^{-x}$$

حيث s, k هما ضوابط عدم التشابه بين y_{p_1}, y_{p_2} وبين الحلول الأساسية لـ $L(y) = 0$.

ونلاحظ هنا أن e^x, xe^x هما حلول أساسية ، وبالتالي فإن $y_{p_1} = x^2(a_1x + b_1)e^x$.

أما y_{p_2} فلا تشابه بين حدوده والحلول الأساسية ومنه $k = 0$.

إن

$$y_p = x^2(a_1x + b_1)e^x + (a_2x + b_2)e^{-x}$$

مثال (2) : جد شكل y_p للمعادلة :

$$(D^4 + 2D^3 - 3D^2)y = x + 2e^{3x} + e^x$$

الحل : أولاً نجد الحلول الأساسية لـ :

$$r^4 + 2r^3 - 3r^2 = 0$$

$$r^2(r^2 + 2r - 3) = 0$$

$$r^2(r+3)(r-1) = 0$$

وعليه فالحلول هي : $0, 0, -3, 1$. إذن الحلول الأساسية هي :

$$y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = e^{-3x}, y_4 = e^x$$

والآن

$$f(x) = x + 2e^{-3x} + e^x$$

$$= f_1 + f_2 + f_3$$

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$$

إذن

حيث

$$y_{p_1} = x^k(a_1x + b_1)$$

$$y_{p_2} = x^k a_2 e^{-3x}$$

$$y_{p_3} = x^m a_3 e^x$$

والمعادلة s, k, m هي ضوابط عدم التشابه .

وبالنظر إلى الحلول الأساسية والافتراضات f_1, f_2, f_3 نجد أن شكل الحلول الخاصة هي :

$$y_{p_1} = a_1 x + b_1$$

$$y_{p_2} = a_2 x e^{-3x}$$

$$y_{p_3} = a_3 x e^x$$

ويكون

$$y_p = (a_1 x + b_1) + a_2 x e^{-3x} + a_3 x e^x$$

يكتفيك هذا القدر من الأمثلة . وإلى بند آخر .

مسائل

الوحدة الخامسة

بند (3)

1- حل المعادلات التفاضلية التالية (الحل العام) :

$$(1) D(D+1)y = 2x + 3e^x$$

$$(2) D(D+1)y = 2 + e^{-x}$$

$$(3) D(D-1)y = \sin x$$

$$(4) (D^2+1)y = 3\cos x$$

$$(5) (D^2+4D+2)y = xe^{-2x}$$

$$(6) (D^2+D-6)y = 6(x+1)$$

$$(7) D(D^2-2D+10)y = 3xe^x$$

$$(8) (D^3+3D^2+3D+1)y = x^4+4x^3$$

$$(9) (D^3-D^2-D+1)y = 2(x+2e^{-x}) \quad (10) (D^4+5D^2+4)y = 2\cos x$$

2- جد شكل الحل الخاص لكل من :

$$(1) (D^2+1)^3(D-1)y = 3e^{-x} + 5x^2 \cos x$$

$$(2) D^2(D^4-4D^3+6D^2-4D+1)y = (x^2+1)(1-e^x)$$

$$(3) (D^4-2D^2+1)y = (2x-1)\cosh x + x^2 \sin x$$

$$(4) (D^3-1)(D^2+D-2)y = e^{\frac{x}{2}} \sin \sqrt{3}x - x \cos \sqrt{3}x$$

2- طريقة تغير الوسطاء (Variation Of Parameters)

وهذا أيضا لا جديد . ففي الوحدة الرابعة أوجدنا لك قانون إيجاد y_p والذي كان بالشكل:

$$y_p = \int_{x_0}^x K(x,t)f(t) dt \quad (1)$$

حيث $K(x,t)$ هو اقتران جرين . وطريقة برهان وإيجاد لقانون (1) في حالة المرتبة الثانية للمعادلة $L(y) = f$ لا تختلف مطلقا عنها في حالة الرتب العالية سوى في الحسابات . ولذلك نكتفي هنا بأن نعطيك القانون (1) في الحالة العامة :

نظرية 4.1 : إذا كان y_1, \dots, y_n هي الحلول الأساسية للمعادلة $L(y) = f$ فإن

$$y_p = \int_{x_0}^x K(x,t)f(t) dt$$

حيث

$$K(x,t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & \dots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1(x) & \dots & y_n(x) \end{vmatrix}}{W[y_1, \dots, y_n](t)}$$

وبرهان هذه النظرية لا يختلف أبدا عن برهان قانون (1) في الوحدة الرابعة . ولذلك سنكتفي

بنص النظرية دون برهانها .

أتريد أمثلة الآن . سوف نضع أمامك أحدها .

مثال (1) : جد y_p للمعادلة $3y''' + 5y'' - 2y' = e^x$.

الحل : نجد أولا الحلول الأساسية

$$3r^3 + 5r^2 - 2r = 0$$

$$r(3r^2 + 5r - 2) = 0$$

ومنه

أي أن

$$r(3r-1)(r+2) = 0$$

وعليه فإن : $r_1=0$, $r_2=\frac{1}{3}$, $r_3=-2$

إذن $y_1=1$, $y_2=e^{\frac{x}{3}}$, $y_3=e^{-2x}$

والآن نجد $W[y_1, y_2, y_3](t)$

وبن كمت بالحسابات ستجد أن رونسكي الحول هو :

$$W[y_1, y_2, y_3](t) = -\frac{2}{9}e^{-\frac{5x}{3}} - \frac{4}{3}e^{-\frac{5x}{3}}$$

ونستطيع بعد ذلك أن نكتب $K(x, t)$ لنجد :

$$K(x, t) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & e^{-2t} & e^{\frac{t}{3}} \\ 0 & -2e^{-2t} & \frac{1}{3}e^{\frac{t}{3}} \\ 0 & e^{-2t} & e^{\frac{t}{3}} \end{vmatrix}}{W[y_1, \dots, y_n](t)} = \frac{\frac{7}{3}e^{-\frac{5t}{3}} - \frac{1}{3}e^{-2t}e^{\frac{t}{3}} - 2e^{\frac{t}{3}}e^{-2t}}{-\frac{2}{9}e^{-\frac{5t}{3}} - \frac{4}{3}e^{-\frac{5t}{3}}} \\ = -\frac{3}{2} + \frac{3}{14}e^{-2(x-1)} + \frac{9}{7}e^{\frac{(x-1)}{3}}$$

وعليه يكون

$$y_1 = \int_{x_0}^x K(x, t) e^t dt \\ = \int_{x_0}^x \left[-\frac{3}{2}e^t + \frac{3}{14}e^{-2t} \cdot e^{2x} + \frac{9}{7}e^x \cdot e^{\frac{2t}{3}} \right] dt$$

نستطيع هنا اختيار $x_0 = 0$. هل تريد أن تجري التكامل الأخير ، لعنا نرى الشوق في عينيك . إذن سنتركه لك .

لنذهب إلى بند آخر .

مسائل

للوحدة الخامسة

بند (4)

1- جد الحل العام للمعادلات التالية باستخدام طريقة تغيير الوسطاء .

$$(1) (D^3 - D^2 - D + 1)y = 4xe^x$$

$$(2) y''' - y' = \sin x$$

$$(3) y''' - 2y' = 4(x+1)$$

$$(4) (D^3 - 3D^2 - D + 3)y = 1 + e^x$$

$$(5) y''' - 7y' + 6y = 2\sin x$$

$$(6) y''' - 3y' - 2y = 9e^{-x}$$

$$(7) y''' - y' = \cos x$$

$$(8) y''' + y'' + y' + y = 2(\sin x + \cos x)$$

$$(9) y^{(4)} - y'' = 2xe^x$$

$$(10) y^{(4)} - y = x^2 + 1$$

5- معادلة أويلر (Euler Equation)

في هذا البند نعالج المعادلة من الشكل

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0 \quad (1)$$

حيث a_0, a_1, \dots, a_{n-1} هي ثوابت .

لعلك مندهش ! كيف نبحث معادلة ذات معاملات متغيرة ونحن بصدد المعادلات ذات المعاملات الثابتة . لا تحزن ! فهذه معادلات يمكن تحويلها إلى معادلات ذات عوامل ثابتة .
أما طريق ذلك فإليك البيان :

طريقة حل معادلة أويلر :

1- نضع التعويض $x = e^t$ أو $t = \ln x$.

2- نعوض في المعادلة ونغير التفاضل من $\frac{dy}{dx}$ إلى $\frac{dy}{dt}$.
وباستخدام قانون السلسلة في التفاضل نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right]$$

⋮

وإذا أردنا تبسيط شكل الكتابة نضع $D = \frac{d}{dt}$ فنجد أن :

$$y' = \frac{1}{x} D y, \quad y'' = \frac{1}{x^2} D(D-1)y$$

$$y''' = \frac{1}{x^3} D(D-1)(D-2)y,$$

⋮

$$y^{(n)} = \frac{1}{x^n} D(D-1) \dots (D-n+1)y$$

3- نحصل بهذا على معادلة ذات عوامل ثابتة :

$$[D(D-1) \dots (D-n+1) + \dots + a_1 D + a_0] y = 0 \quad (*)$$

4- نحل المعادلة (*) بطريقة ليند الثاني من هذه الوحدة .

وهنا يكون الحل : y بدلالة المتغير t .

5- نعوض $t = \ln x$ لنحصل على الحل المطلوب للمعادلة (1) .

والآن إلى بعض الأمثلة .

مثال (1) : حل المعادلة $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$.

الحل : هذه معادلة أويلر . إذن نضع $x = e^t$ أو $t = \ln x$.
ذلك يعطينا

$$y'' = \frac{1}{x^2} [D(D-1)y]$$

$$y' = \frac{1}{x} Dy$$

حيث $D = \frac{d}{dt}$. إذن تصبح المعادلة

$$[D(D-1) + 2D - 2]y = 0 \quad (*)$$

نحل هذه المعادلة لنجد

$$r(r-1) + 2r - 2 = 0$$

$$(r+2)(r-1) = 0$$

ومنه

$$r_1 = 1, \quad r_2 = -2$$

أي ويكون y_h للمعادلة (*) هو :

$$y_h = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t$$

نضع الآن $t = \ln x$ (أو $e^t = x$) لنحصل على :

$$y_h = c_1 \frac{1}{x^2} + c_2 x$$

مثال (2) : حل المعادلة $(x-1)^2 y'' + 2(x-1)y' - 2y = 0$.

الحل : لا تبدو هذه المعادلة على أنها معادلة أويلر ، لا عليك إنها كذلك . لكن هناك تعويض قبل أن تصبح المعادلة بشكل معادلة أويلر .

ذلك التعويض هو $x - 1 = u$. ومنه

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{du}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{du^2}$$

إذن تصبح المعادلة :

$$u^2 \frac{d^2 y}{du^2} + 2u \frac{dy}{du} - 2y = 0$$

هذه معادلة أولار . نحلها بالتعويض $u = e^t$ (أو $t = \ln u$) لنحصل على :

$$[D(D-1)+2D-2]y = 0$$

وكما سبق في المثال السابق حل هذه هو :

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t$$

نضع $t = \ln u$ لنحصل على :

$$y = \frac{c_1}{u^2} + c_2 u$$

نعوض الآن $u = x - 1$ ، لنحصل على

$$y = \frac{c_1}{(x-1)^2} + c_2 (x-1)$$

والى مثال أخير ولكن كن يقظاً لهذا المثال .

مثال (3) : حل المعادلة $(2x-1)^3 y'' + (2x-1)y' - 2y = 0$.

الحل : كما في المثال السابق : نضع $u = 2x - 1$.

ومنه نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2 \frac{dy}{du}$$

وكذلك

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left[\frac{dy}{dx} \right] \\ &= 4 \frac{d^2 y}{du^2} \end{aligned}$$

إنّ تصبح المعادلة :

$$4u^2 \frac{d^2 y}{du^2} + 2u \frac{dy}{du} - 2y = 0$$

هذه معادلة أولار .

إنّ نضع $u = e^t$ (أو $t = \ln u$) لنحصل على

$$[4D(D-1)+2D-2]y = 0$$

(حيث $D = \frac{d}{dt}$) .

والمعادلة

$$4r(r-1) + 2r - 2 = 0$$

تعطينا $r = -\frac{1}{2}$, $r = 2$.

$$y = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + c_2 e^t \quad \text{ومنه}$$

نعوض $t = \ln u$ ، لنحصل على :

$$y = c_1 \frac{1}{\sqrt{u}} + c_2 u$$

والخبر! نعوض $u = 2x - 1$ ، لنحصل على :

$$y = c_1 \frac{1}{2x-1} + c_2 (2x-1)$$

وبهذا نأتي على ختام هذا البند ، لنرجل بسيفتنا إلى بند آخر . فإلى هناك .

مسائل

الوحدة الخامسة

بند (5)

١- حل المعادلات التفاضلية التالية (الحل العام) :

$$(1) \quad x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$$

$$(2) \quad x^2 y'' + xy' = 0$$

$$(3) \quad x^2 y'' + 9xy' + 2y = 0$$

$$(4) \quad x^2 y'' + xy' + 9y = 0$$

$$(5) \quad x^2 y'' - 5xy' + 25y = 0$$

$$(6) \quad x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0$$

$$(7) \quad 2x^2 y'' - xy' + y = 0$$

$$(8) \quad x^2 y'' - 5xy' + 5y = 0$$

$$(9) \quad (x-1)^2 y'' + 3(x-1)y' + y = 0$$

$$(10) \quad (x+4)^3 y''' - 2(x+4)y' + 2y = 0$$

$$(11) \quad (x-3)^3 y''' + 2(x-3)^2 y'' - (x-3)y' + y = 0$$

$$(12) \quad (2x+1)^2 y'' + 4(2x+1)y' + y = 0$$

6- المفعلي وعلاقته بالحلل الخاص (Annihilator)

لقد مر بنا مفهوم المفعلي في الوحدة الثالثة . وهنا نذكره به ونستخدمه في إيجاد شكل الحل الخاص للمعادلة $L(y) = f$ في طريقة العوامل غير المعينة دون الحاجة للنظر إلى الحلول الأساسية للمعادلة $L(y) = 0$. ولنبدأ بإعطاء المفعلي تعريفاً دقيقاً .

تعريف 6.1 : نقول أن المؤثر L يفني الاقتران y إذا كان $L(y)(x) = 0$ لكل x في R . ومن التعريف نستنتج أن الاقتران y معرف على كل R . وإذا كان L هو حدودية في مؤثر التفاضل فإن $y^{(n)}$ موجود لكل x في R ، حيث n يعتمد على درجة الحدودية .

ولنأت الآن ببعض الأمثلة .

مثال (1) : جد مفعلي للاقتران $y = e^{2x}$.

الحل : لنفرض $D - 2 = L$. إذا حسبنا $L(y)$ نجد

$$L(y) = (e^{2x})' - 2e^{2x} = 2e^{2x} - 2e^{2x} = 0$$

وعليه يكون $D - 2$ مفعلي للاقتران $y = e^{2x}$.

مثال (2) : جد مفعلي للاقتران $y = e^{2x} \sin 3x$.

الحل : إذا كان $L = (D - 2)^2 + 9 = D^2 - 4D + 13$ نجد أن :

$$L(e^{2x} \sin 3x) = 0$$

وهنا لا بد من الملاحظة أن حلول المعادلة

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

$$y_2 = e^{2x} \cos 3x , \quad y_1 = e^{2x} \sin 3x \quad \text{هي}$$

وعليه فإن $L = (D - 2)^2 + 9$ هو مفعلي للاقتران $y = e^{2x} \sin 3x$.

مثال (3) : جد مفعلي للاقتران $y = x^2 e^x - x \sin 4x + 3$

الحل : نلاحظ هنا أن $y = y_1 + y_2 + y_3$. انك نجد L_1 مغنيا لـ y_1 ، L_2 مغنيا لـ y_2 ، $L_3 = D$ ، y_3 هو مغنيا لـ y_3 . ويكون $L = L_1 L_2 L_3$ هو مغنيا للاقتراح y . ولا بد من ملاحظة أن L_1 ، L_2 ، L_3 هي حدوديات في مؤثر التفاضل D ، وبالتالي

$$L_2 L_1 L_3 = L_1 L_2 L_3 = L_3 L_2 L_1$$

أي أنها تبادلية في ما بينها .

والآن بسهولة نرى أن $L_3 = D$. أما y_2 فإنه حل أساسي للمعادلة $(D^2 + 16)y = 0$ وعليه $L_2 = (D^2 + 16)^2$. وكذلك $x^2 e^x$ هو حل للمعادلة $(D - 1)^3 y = 0$ وعليه يكون $L_1 = (D - 1)^3$.

$$L = (D - 1)^3 (D^2 + 16)^2 D$$

إن

هل تريد أمثلة أخرى .

ربما نضع الأمثلة بصورة أخرى .

مثال (4) : جد المعادلة التفاضلية الخطية ذات العوامل الثابتة التي حلها العام

$$y_8 = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + c_4 \sin x + c_5 \cos x$$

الحل : نجد مغني كل حد من حدود الحل العام ثم نركب المغنيات لنحصل على المؤثر الأساسي الذي يكون المعادلة . ولكن لا بد من ملاحظة أن نأخذ للمغني المشترك في حال التكرار أو الاشتراك في المغنيات .

وعليه فإن D^2 هو مغني $y = x$ وهو أيضا مغني $y = 1$. ومغني e^{-x} هو $(D + 1)$ ومغني $y = \sin x$ هو مغني $\cos x$ وهو المؤثر $(D^2 + 1)$ ، وعليه فإن المؤثر الأساسي للمعادلة هو $L = D(D + 1)(D^2 + 1)$ ، وتكون المعادلة المطلوبة هي :

$$L(y) = y^{(4)} + y''' + y'' + y' = 0$$

مثال (5) : جد المعادلة التفاضلية التي حلها العام

$$y_8 = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + x^3$$

الحل : نلاحظ هنا أن $y_h = y_h + y_p$ ، حيث
 $y_p = x^3$ و $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

إذن معادلتنا المطلوبة ليست متجانسة فهي من الشكل $L(y) = f$.
 وعليه أماننا قضيتان : إيجاد L وإيجاد f .

أما L فنجده باستخدام y_h كما سلف في الأمثلة السابقة . وحيث $y_1 = e^x$ ، $y_2 = e^{-x}$ ، فإن
 المعني المشترك لهما هو :

$$L = (D+1)(D-1) = D^2 - 1$$

أما f فنجده باستخدام : $L(y_p) = f$
 إذن

$$f = (D^2 - 1)(x^3) \\ = 6x - x^3$$

وبالتالي فإن معادلتنا المطلوبة هي :

$$L(y) = f \\ (D^2 - 1)y = 6x - x^3$$

إنه حق لمثال جميل .

ولكن دعنا نرى الآن علاقة المعني بطريقة إيجاد الحل الخاص في حال : **طريقة العوامل غير المعينة** .

عندما كنا نريد إيجاد شكل y_p بطريقة العوامل غير المعينة ، كان علينا إيجاد y_h ثم التأكد من
 عدم وجود حدود مشتركة بين y_h و y_p .
 ولكن إذا استخدمنا فكرة المعني فإننا نستطيع إيجاد شكل y_p دون الحاجة للمقارنة بينه وبين
 y_h .

واليك بيان ذلك :

نأخذ المعادلة $L(y) = f$ حيث f اقتران مولد من $\sum_{i=1}^n \alpha_i x^i, e^m, \cos x, \sin x$ عن طريق الجمع أو الضرب أو كليهما معا .

إذا كان T هو مفن للاقتران f ، فلن :

$$TL(y) = Tf = 0$$

وعليه نحصل على معادلة متجانسة $TL(y) = 0$

والمؤثر L هو حدودية $P(D) = a_0 + a_1 D + \dots + a_n D^n$ ، وكذلك

المؤثر T هو حدودية $Q(D) = b_0 + b_1 D + \dots + b_k D^k$. وكون T هو من هذا الشكل نأخذ عن واقع f المبين أعلاه .

وعليه : الحل العام للمعادلة $L(y) = f$ هو نفسه حل للمعادلة $TL(y) = 0$. وشكل الحل العام للمعادلة هو :

$$y_g = c_1 y_1 + \dots + c_{k+n} y_{k+n}$$

حيث حصلنا على y_1, y_2, \dots, y_{k+n} عن طريق جذور الحدودية $Q(r)P(r)$.
والحل العام y_h للمعادلة $L(y) = 0$ هو جزء من حل المعادلة $TL(y) = 0$. وعليه فإن شكل y_p هو : $\boxed{y_g - y_h}$ حيث y_g هو الحل العام لـ $TL(y) = 0$.

والآن إلى بعض الأمثلة .

مثال (6) : جد شكل y_p للمعادلة

$$L(y) = (D^2 + 1)(D - 1)^2 y = 3e^x + 4 \cos x$$

الحل : نجد أولاً مفني f وهو في حالتنا $T = (D - 1)(D^2 + 1)$.
إذن معادلتنا الجديدة هي :

$$TL(y) = (D - 1)(D^2 + 1)(D^2 + 1)(D - 1)^2 y = 0$$

ومنه نحصل على :

$$(D^2 + 1)^2 (D - 1)^3 y = 0 \dots (*)$$

وحيث أن جذور $(r^2 + 1)^2(r - 1)^3$ هي :

$i, i, -i, -i, 1, 1, 1$ ، فإن الحل العام للمعادلة (*) هو :

$$y_g = c_1 \sin x + c_2 \cos x + c_3 x \sin x + c_4 x \cos x + c_5 e^x + c_6 x e^x + c_7 x^2 e^x$$

أما y_h للمعادلة $L(y) = 0$ فهو :

$$y_h = a_1 \sin x + a_2 \cos x + a_3 e^x + a_4 x e^x$$

وحيث أننا يمكن أن نعيد تسمية الثوابت كما نشاء ، فإن :

$$y_p = y_g - y_h = b_1 x^2 e^x + b_2 x \cos x + b_3 x \sin x$$

هل نريد مثالاً آخر . أمر سهل :

مثال (7) : جد شكل الحل الخاص للمعادلة

$$[D(D+1)]^2[(D+1)^2+1]y = x^3 + x \cos x$$

الحل : نجد أولاً مفتي f . وهو في حالتنا :

$$T = D^3[(D-1)^2+1]^2$$

إن معادلتنا الجديدة هي :

$$D^3[(D+1)^2+1]^2[D^2(D+1)^2][(D+1)^2+1]y = 0$$

أي :

$$D^3(D+1)^2[(D+1)^2+1]^3 y = 0$$

ومنه

$$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 x^4 + c_6 e^{-x} + c_7 x e^{-x} \\ + c_8 e^{-x} \sin x + c_9 e^{-x} \cos x + c_{10} x e^{-x} \sin x \\ + c_{11} x e^{-x} \cos x + c_{12} x^2 e^{-x} \sin x + c_{13} x^2 e^{-x} \cos x$$

ولكن y_h للمعادلة $L(y) = 0$ هو :

$$y_h = a + a_2 x + a_3 e^{-x} + a_4 x e^{-x} + a_5 e^{-x} \sin x + a_6 e^{-x} \cos x$$

وعليه يكون شكل y_p هو :

$$y_p = b_1 x^2 + b_2 x^3 + b_3 x^4 + b_4 x e^{-x} \sin x \\ + b_5 x e^{-x} \cos x + b_6 x^2 e^{-x} \sin x + b_7 x^2 e^{-x} \cos x$$

يكفي هذا القدر من الأمثلة في هذه الوحدة .

مسائل

الوحدة الخامسة

بند (6)

1- جد مفني الاقترانات التالية .

$$(1) y = x^4 - x^2 + 11$$

$$(2) y = 3x^2 - 6x + 1$$

$$(3) y = e^{-7x}$$

$$(4) y = e^{8x} + \sin x$$

$$(5) y = e^{2x} - 6e^x$$

$$(6) y = x^2 - e^x + \cos x$$

$$(7) y = x^2 e^{-x} \sin 2x$$

$$(8) y = xe^{3x} \cos 5x + 1$$

$$(9) y = xe^{-2x} + xe^{-8x} \sin 3x$$

$$(10) y = 1 + x + x^2 + x \sin x$$

2- استخدم طريقة المفني لإيجاد شكل الحل الخاص لكل من :

$$(1) y'' - 5y' + 6y = \cos 2x + 1$$

$$(2) y'' + 6y' + 8y = e^{3x} - \sin x$$

$$(3) y'' - 5y' + 6y = e^{3x} - x^2$$

$$(4) y'' - y = xe^x$$

$$(5) y'' - 6y' + 9y = \sin 2x + x$$

الوحدة السادسة

تحويل لابلاس

• Laplace Transform •

إن تحويل لابلاس من الأدوات المهمة والفاعلة في حل المعادلات التفاضلية وخاصة مسائل القيم الابتدائية . والمُر في تحويل لابلاس أنه يحول المعادلة التفاضلية إلى معادلة عادية (ليست تفاضلية) . ويستخدم تحويل لابلاس أيضا في حل المعادلات التكاملية . وسوف نقوم في هذه الوحدة بدراسة هذا التحويل دراسة شاملة إلى حد ما بما يلائم مستوى مادة هذا الكتاب.

1- التعريف (Definition Of Laplace Transform)

إن تحويل لابلاس ليس سوى اقتران ، ولكن بصفات محددة . والاقتران عادة يقف على ثلاثة أقدام : قدم المجال وقدم المدى وقدم قاعدة الاقتران . وقاعدة الاقتران هي لقوى الأقدام .

وحيث أننا في النهاية نريد أن نحل معادلة تفاضلية ، فلا بد أن نحصر مجال تحويل لابلاس في فضاء الاقترانات شبه المتصلة على الأعداد الحقيقية \mathbf{R} . نعلم أنك الآن تسامحت بصوت عال : " ماذا تعني شبه متصلة " ؟ . سوف نبذل عنك الشك بحرارة اليقين .

تعريف 1.1 : يسمى الاقتران f اقترانا متصلا قطعيا أو شبه متصل على $[a, b]$ حيث $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ، إذا تحققت الشروط التالية :

(1) f متصل على $[a, b]$ ما عدا على عدد منتهى من النقاط $\{x_1, \dots, x_n\}$.

(2) النهايات $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(x+t)$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(x-t)$ موجودة لكل x في $[a, b]$

(عند أطراف الفترة فقط نهاية واحدة لها معنى) .

ونقول أن f متصل قطعيا على $[a, \infty)$ إذا كان f متصلا قطعيا على كل فترة

$[a, b]$ حيث $b > a$.

نستنتج من ذلك أن الاقتران المتصل قطعيا على $[a, b]$ هو اقتران متصل على $[a, b]$ ما عدا عند عدد منتهى من النقاط وعند هذه النقاط يكون سلوك الاقتران مسطرا عليه .

$$\begin{aligned} \text{مثال (1) : الاقتران } f: [0, 4] \rightarrow \mathbf{R} \\ f(x) = \begin{cases} 5 & 0 \leq x \leq 1 \\ 3 & 1 < x \leq 2 \\ 0 & 2 < x \leq 4 \end{cases} \end{aligned} \quad \text{حيث}$$

هو اقتران متصل قطعيا حيث أن نقاط المشاكل لهذا الاقتران هي 1 ، 2 . ونلاحظ بيسر وجود النهايات عند هذه النقاط .

$$\text{مثال (2) : الاقتران } f: [0, 4] \rightarrow \mathbf{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ x & x = 0 \end{cases} \quad \text{حيث}$$

ليس متصلا قطعا حيث أن النهاية $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ غير موجودة .

ونحن على يقين أنك لاحظت ما يلي :

ملاحظة(1) : كل اقتران متصل على $[a, b]$ هو اقتران متصل قطعا .

والآن دعنا نضع لك تعريف تحويل لابلاس من حيث قاعدة التحويل وليس مجاله . ولكن لا بد أن نخبرك أن المجال الذي سوف نعرف عليه تحويل لابلاس سوف يكون جزءا من الاقترانات المتصلة قطعا على $[0, \infty)$.

والآن إلى التعريف الأساسي :

تعريف 1.2 : لنفرض أن f اقتران حقيقي على الفترة $[0, \infty)$ ومتصل قطعا . فإن

$$L(f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \dots\dots\dots (1)$$

إن تحويل لابلاس هو تحويل تكامل . يحول الاقتران f في المتغير t إلى اقتران جديد $\hat{f}(s) = L(f)(s)$ في المتغير s ولا بد أن نذكر هنا :

ملاحظة(2) : إن مجال الاقتران الجديد $\hat{f}(s)$ يعتمد على الاقتران f . فبالإضافة لتغير f فإن مجال \hat{f} يتغير .

ملاحظة(3) : يجب أن نفهم التكامل (1) على أنه تكامل مبطل وعليه فإن :

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha} e^{-st} f(t) dt$$

والآن إلى بعض الأمثلة :

مثال(3) : جد لابلاس $f(t) = t$.

المسئ : سوف نطبق للتعريف :

$$L(t)(s) = \hat{f}(s) = \int_0^{\infty} t e^{-st} dt$$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_0^r t e^{-st} dt \right]$$

وباستخدام التكامل بالتجزئة نحصل على :

$$L(t)(s) = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0$$

مثال (4) : جد لابلاس $f(t) = \cos 2t$

الحل : ليس هناك أفكار بل حسابات .

$$L(\cos 2t)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cos 2t dt$$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_0^r e^{-st} \cos 2t dt \right]$$

وإذا كملنا بالتجزئة نحصل على :

$$L(\cos 2t)(s) = \frac{s}{s^2 + 4} + \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-sr}}{s^2 + 4} (2 \sin 2r - s \cos 2r) \right]$$

ونلاحظ هنا أن النهاية في الحد الثاني موجودة فقط إذا كان $s > 0$. فإذا كانت $s = 0$ فإن

$\lim_{r \rightarrow \infty} \sin 2r$ غير موجودة .

وكذلك إذا كانت $s < 0$ فإن $\lim_{r \rightarrow \infty} e^{-sr} = \infty$ وتكون النهاية غير موجودة . وعليه فإن

$L(\cos 2t)(s)$ موجود فقط على الفترة $(0, \infty)$.

$$L(\cos 2t)(s) = \frac{s}{s^2 + 4} \quad \text{ومنه}$$

والآن :

هل كل اقتران متصل قطعيًا هو في مجال تحويل لابلاس ؟

الجواب لا . ولعلك قادر بنفسك أن تتحقق أن $f(t) = e^{t^2}$ متصل قطعيًا ولكن $L(e^{t^2})$ غير

موجود . ولذا فيك ثقة أن تقوم بالحسابات بنفسك .

وهذا الواقع يفرض علينا للتعريف التالي :

تعريف 1.3 : لنفرض أن f الاقتران معرف على $[0, \infty)$. نقول أن f هو اقتران ذو ترتيب أسي إذا وجد هناك ثابتان c, α بحيث :

$$|f(t)| \leq ce^{\alpha t}$$

لكل t في $(0, \infty)$.

ونستطيع أن نلخص خصائص الاقترانات ذات الترتيب الأسي في النظرية التالية :

نظرية 1.1 : مجموعة الاقترانات ذات الترتيب الأسي تشكل متجها فضاءيا بالنسبة للمعامل العادية .

البرهان : لنرمز لمجموعة الاقترانات ذات الترتيب الأسي على الفترة $[0, \infty)$ بالرمز $E[0, \infty)$. وسوف نكتفي ببرهان أن عملية الجمع مغلقة على $E[0, \infty)$ وأن عملية ضرب الثوابت أيضا مغلقة . أما بقية الخصائص فهي سهلة الاستنتاج ونتركها لك حتى لا تشعر بالفراغ أو الملل .

والآن لنفرض أن $f_1, f_2 \in E[0, \infty)$ وعليه

$$|f_1(t)| \leq c_1 e^{\alpha_1 t}$$

$$|f_2(t)| \leq c_2 e^{\alpha_2 t}$$

$$\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}, \quad c = \max\{c_1, c_2\}$$

فإن

$$|f_1(t) + f_2(t)| \leq c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{\alpha t}$$

$$\leq ce^{\alpha t}$$

وكذلك

$$|\lambda f_1(t)| \leq |\lambda| c_1 e^{\alpha t}$$

وهذا ينهي برهان ما أردنا برهانه .

ومن الأمثلة على الاقتربات ذات للترتيب الأسّي على $[0, \infty)$:

نظرية 1.2 :

1- $P(t) \in E[0, \infty)$ لكل حدودية $P(t)$.

2- $\sin at \in E[0, \infty)$ لكل $a \in \mathbb{R}$.

3- $\cos at \in E[0, \infty)$ لكل $a \in \mathbb{R}$.

4- $e^{at} \in E[0, \infty)$ لكل $a \in \mathbb{R}$.

5- حاصل ضرب أي من الاقتربات 1، 2، 3، 4 هو في $E[0, \infty)$.

البرهان : 1- باستخدام نظرية 1.1 يكفي أن نبرهن أن $P(t) = t^n$ هي في $E[0, \infty)$ لأي $n \in \mathbb{N}$.

ولكن من متسلسلة تيلر للاقترب الأسّي نجد أن

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \frac{t^{n+1}}{n+1!} + \dots$$

وحيث أن $t \in [0, \infty)$ فإن :

$$\frac{t^n}{n!} \leq e^t$$

ومنه $t^n \leq (n!)e^t$.

وعليه $t^n \in E[0, \infty)$.

2- $f(t) = \sin at$ ومنه :

$$|f(t)| \leq 1 = e^{0t} \leq e^{at}$$

لكل $t \in [0, \infty)$.

إذن $\sin at \in E[0, \infty)$.

3- البرهان شبيهة بالتيه في (2).

4- هذه نتركها لك.

5- يكفي أن نبرهن الخاصية : إذا كان $f_1, f_2 \in E[0, \infty)$ فإن $f_1, f_2 \in E[0, \infty)$.

ولكن :

$$|f_1(t)| \leq c_1 e^{a_1 t}$$

$$|f_2(t)| \leq c_2 e^{a_2 t}$$

ومنه

$$|f_1(t) \cdot f_2(t)| \leq c_1 \cdot c_2 e^{(\alpha_1 + \alpha_2)t}$$

وهذا ينهي برهان النظرية .

والآن نستطيع أن نعرف جزءاً كبيراً من مجال تحويل لابلاس . والتفصيل في هذه النظرية

نظرية 1.3 : كل القتران متصل لبطعياً ذي ترتيب أسّي على الفترة $(0, \infty)$ هو في مجال تحويل لابلاس .

البرهان : لنفرض أن $f \in E[0, \infty)$. إذن

$$|f(t)| \leq ce^{\alpha t}$$

لبعض α, c في \mathbb{R} . ومنه

$$L(f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

ولكن

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} ce^{-st} e^{\alpha t} dt &= \lim_{t \rightarrow \infty} c \int_0^t e^{(\alpha-s)t} dt \\ &= c \cdot \frac{1}{s-\alpha} \lim_{t \rightarrow \infty} [1 - e^{-(s-\alpha)t}] \end{aligned}$$

وهذه النهاية موجودة فقط إذا كان $s > \alpha$.

ومن نظريات المقارنة في موضوع التكامل نستنتج أن $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ موجود لكل $s > \alpha$.

أي أن $L(f)(s)$ موجود لكل $s > \alpha$.
وهذا ينهي البرهان .

وقبل أن نلهي هذا البند نريد أن نذكرك بنظرية المة لارزة في التكامل :

إذا كان $|g(t)| \leq h(t)$ لكل $t > 0$ وكان $\int_0^{\infty} h(t) dt$ موجود ثلین $\int_0^{\infty} f(t) dt$ موجود .

مسائل

الوحدة السادسة

بند (1)

1- أي الاقترانات متصل قطعا على $[0, \infty)$:

(1) $y(x) = \frac{1}{x}$ (2) $y(x) = [x]$, x صحيح

(3) $y(x) = \sin \frac{1}{x}$ (4) $y(t) = \frac{t+1}{t-1}$

(5) $y(t) = \ln(1+t^2)$ (6) $y(t) = \begin{cases} 0 & , t \in \mathbb{Z} \\ 1 & , t \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

(7) $y(t) = e^{\frac{1}{t}}$ (8) $y(t) = \frac{\sin t}{t^2}$

2- جد لابلاس الاقترانات التالية :

(1) $y(t) = t$ (2) $y(t) = e^{at}$

(3) $y(t) = \sin at$ (4) $y(t) = t^2$

(5) $y(t) = \sinh t$ (6) $y(t) = \cosh t$

3- برهن أن $y(t) = \sqrt{t}$ اقتران ذو ترتيب أسّي .

4- برهن أنه إذا كان f اقترانا ذا ترتيب أسّي فإن $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{e^{at}} = 0$.

2- خصائص أساسية لتحويل لابلاس (Fundamental Properties Of Laplace Transform)

نذكرك بأنه إذا كان f في تحويل لابلاس \mathcal{L} فإن :

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

ما هو مجال تحويل لابلاس ؟ هذا سؤال صعب . لكننا في البند الأول استطعنا أن نجد فضاء جزئيا في مجال \mathcal{L} ، ألا وهو $E[0, \infty)$ وهو فضاء الاقترانات المتصلة قطعيا ذات الترتيب الأسّي . وسوف ندرس \mathcal{L} فقط على $E[0, \infty)$.
وستكون خصائص تحويل لابلاس التي سوف ندرسها هي خصائص \mathcal{L} على الفضاء $E[0, \infty)$.

وسوف نمرّد هذه الخصائص على شكل نظريات منها ما سنبرهنه ومنها ما برهانه خارج نطاق هذا الكتاب ومنها ما سنتركه لك تستمتع به كيف شئت .

نظرية 2.1 : إن تحويل لابلاس تحويل خطي على $E[0, \infty)$.

وبرهان هذه النظرية نتركه لك . ورزق قد ساقه الله إليك فلا ترده .

نظرية 2.2 : إذا كان $f \in E[0, \infty)$ فإن :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}(f)(s) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 0$$

البرهان : لنفرض أن $f \in E[0, \infty)$. وحسب تعريف $E[0, \infty)$ ، هناك c, α ثوابت في \mathbb{R} بحيث $|f(t)| \leq ce^{\alpha t}$ لكل t في $[0, \infty)$. وعليه وفق نظريات مقارنة التكاملات (التي ذكرت في نهاية بند 1) نحصل على :

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(f)(s)| &= \left| \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right| \\ &\leq c \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt \\ &\leq \frac{c}{s-\alpha}, \quad s > \alpha \end{aligned}$$

ومنه

$$\lim_{s \rightarrow 0} |L(f)(s)| = 0$$

وبالتالي $\lim_{s \rightarrow 0} L(f)(s) = 0$. وهذا ينهي البرهان .

ومن هذه النظرية نستنتج أن $\phi(s) = 1$ ، $\phi(s) = s$ ، مثلاً لا يمكن أن تكون في مدى L على $E[0, \infty)$. أي أنه لا يوجد $f \in E[0, \infty)$ بحيث $L(f)(s) = 1$ أو $L(f)(s) = s$. والسبب في ذلك أن $\lim_{s \rightarrow 0} s \neq 0$ وكذلك $\lim_{s \rightarrow 0} 1 \neq 0$.

أتريد مثلاً في هذا الاتجاه ؟ إليك ذلك :

مثال (1) : هل $\phi(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}$ موجود في مدى L على $E[0, \infty)$ ؟

الحل : لنفرض أن $f \in E[0, \infty)$. من النظرية 2.1 نستنتج أن :

$$|\hat{f}(s)| \leq \frac{c}{s-\alpha} , \quad s > \alpha$$

لثابت ما α في R .

ومن هذا نستنتج $s|\hat{f}(s)| \leq \frac{s \cdot c}{s-\alpha}$ ، $(s > 0)$.

ومنه $c \geq \lim_{s \rightarrow \infty} s|\hat{f}(s)|$. وهذا غير متحقق في $\frac{1}{\sqrt{s}}$. بل إن $\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{1}{\sqrt{s}} = \infty$. وعليه $\frac{1}{\sqrt{s}}$ غير موجود في مدى L على $E[0, \infty)$.

لحل هذا المثال أعطنا خاصية جديدة لتحويل لابلاس تلخصها في :

نظرية 2.3 : إذا كان $f \in E[0, \infty)$ فإن $\lim_{s \rightarrow \infty} s \hat{f}(s)$ محدود .

والآن إلى خاصية أخرى :

نظرية 2.4 : (نظرية إبراهيم)

إن تحويل لابلاس تحويل متباين على $E[0, \infty)$ بالمعنى :

إذا كان $L(g) = L(f)$ فإن $f(t) = g(t)$ لكل t في $[0, \infty)$ ما عدا نقاط الإنفصال للقترايين g, f .

هذه نظرية صعبة البرهان . وبرهانها فوق مستوى هذا الكتاب . لكن النظرية مهمة جداً .

فالنظرية تصرح بأن تحويل لابلاس متباين شامل بين $E[0, \infty)$ وبين مضاء على $E[0, \infty)$ ،
بالمعنى الذي ورد في نص النظرية .
ولنضع الإصطلاح التالي :

ترميز : سوف نرمز لمدى L على $E[0, \infty)$ بالرمز $\hat{E}[0, \infty)$. أي أن :

$$\hat{E}[0, \infty) = \{ \hat{f} : f \in E[0, \infty) \}$$

إن نظرية إيرش تقول بأن

$$L : E[0, \infty) \rightarrow \hat{E}[0, \infty)$$

هو تحويل متباين شامل ، ومتباين هو بالمعنى الذي ورد في نص النظرية من أن الاقترانين
متساويين عند كل التقاطع ما عدا نقاط الانفصال .
فإذا أعملنا تحويل لابلاس فقط على جزء من $E[0, \infty)$ والمكون فقط من الاقترانات
المتصلة كان L تحويلاً متبايناً حقاً . وعليه إذا كان :

$EC[0, \infty)$: هو فضاء الاقترانات المتصلة في $E[0, \infty)$.
 $\hat{EC}[0, \infty)$: هو مجموعة صور عناصر $EC[0, \infty)$ تحت تحويل لابلاس .

فإن نص نظرية إيرش يقول في هذه الحالة :

$$L : EC[0, \infty) \rightarrow \hat{EC}[0, \infty)$$

هو تحويل متباين شامل .

وعليه فإن L له نظير يسمى نظير لابلاس .

ووجود مثل هذا النظير هو الذي سيمكننا من حل معادلات تفاضلية ذات القيم الابتدائية .

مسائل

الوحدة السادسة

بند (2)

- 1- برهن أن $L(\sqrt{t})$ موجود .
 - 2- هل $L(f \cdot g) = L(f) \cdot L(g)$ ؟
 - 3- تحقق من أن $L(e^{t^2})(s)$ غير موجود لكل قيم s .
-

3- تحويل لابلاس على المشتقات والتكاملات (Laplace Transform On Derivatives And Integrals)

هذا بند يدرس : $L(f^{(n)}(t))$ و $L\left(\int_0^t f(x)dx\right)$. وهذه من الأعمدة الرئيسية
لحل المعادلات التفاضلية والتكاملية .
ولنبدا بالتفاضل .

نظرية 3.1 : لنفرض أن $f \in EC[0, \infty)$ وهو قابل للتفاضل n من المرات وأن
 $f^{(n)} \in E[0, \infty)$ ، فإن :
$$L(f^{(n)}) = s^n L(f) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

البرهان : سوف نبرهن النظرية لـ $n = 1$. أما قيم n الأخرى فلن البرهان لا يختلف مطلقاً ،
بل يستخدم نفس الفكرة .

والآن حيث $f' \in E[0, \infty)$ فإن $L(f')$ موجود وإن :

$$L(f')(s) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k e^{-st} f'(t) dt$$

ولكن $f'(t) dt = df$. إذن نستخدم التكامل بالتجزئة للحصول على :

$$\int_0^k e^{-st} f'(t) dt = \int_0^k e^{-st} df$$

$$= e^{-sk} \cdot f|_0^k + \int_0^k s e^{-st} f(t) dt$$

وبأخذ النهاية على k نحصل على :

$$L(f') = \lim_{k \rightarrow \infty} [e^{-sk} f(t) - f(0)] + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

$$= -f(0) + sL(f)$$

$$= sL(f) - f(0)$$

وهذا ينهي البرهان .

نستطيع أن نستخدم هذه النظرية في إيجاد تحويل لابلاس لاهتران بدلالة تحويل الاقتران آخر .

ومن الأمثلة على ذلك :

مثال (1) : جد لابلاس $f(t) = \sin 2t$.

الحل : في المثال (4) من البند الأول من هذه الوحدة أوجدنا :

$$L(\cos 2t) = \frac{s}{s^2 + 4}$$

ولكن $\sin 2t = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \cos 2t$ ومنه

$\frac{d}{dt} \cos 2t = -2 \sin 2t$. نعمل نظرية 3.1 للحصول على :

$$\begin{aligned} L(-2 \sin 2t) &= L\left(\frac{d}{dt} \cos 2t\right) \\ &= sL(\cos 2t) - \cos(2 \cdot 0) \\ &= s \cdot \frac{s}{s^2 + 4} - 1 \\ &= \frac{s^2 - s^2 - 4}{s^2 + 4} \\ &= \frac{-4}{s^2 + 4} \end{aligned}$$

ومنه

$$-2 L(\sin 2t) = \frac{-4}{s^2 + 4}$$

إذن

$$L(\sin 2t) = \frac{2}{s^2 + 4}$$

ماذا عن لابلاس للتكامل ؟ . إليك النص التالي :

نظرية 3.2 : إذا كان $f \in E[0, \infty)$ فإن $g(t) = \int_0^t f(x) dx$ أيضا موجود في $E[0, \infty)$ ، و :

$$L(g) = \frac{1}{s} L(f)$$

البرهان : أما الجزء الأول من أن $g \in E[0, \infty)$ فهذا متدرب لك فعله وأنت مأجور عليه .

أما برهان الجزء الثاني فهو واجب علينا . وسوف نستخدم نظرية 3.1 لبرهانه ، والتفصيل كالتالي :

حيث $g(t) = \int_0^t f(x) dx$ ، فإن استخدام النظرية الأساسية للحساب يعطينا $g'(t) = f(t)$.

وباستخدام نظرية 3.1 نحصل على :

$$L(g') = sL(g) - g(0)$$

ولكن $g(0) = 0$. إذن $L(g') = sL(g)$.

وحيث $g'(t) = f(t)$ ، فإن $L(g') = L(f)$. إذن

$$L(g) = \frac{1}{s} L(g') = \frac{1}{s} L(f)$$

وأظن أننا عملنا للواجب .

وقبل أن نستطيع إعطاء أمثلة أخرى لا بد من الرجول إلى بند آخر نتعرض لخصائص أخرى لتحويل لابلاس . فإلى هناك .

مسائل

الوحدة السادسة

بند (3)

1- جد لابلاس الاقترانات التالية :

$$(1) f(t) = \sin^2 t$$

$$(2) f(t) = \cos^2 t$$

$$(3) f(t) = \cosh^2 t$$

$$(4) f(t) = t \sin t$$

$$(5) f(t) = e^t \sin t$$

$$(6) f(t) = \cos^3 t$$

$$(7) f(t) = \int_0^t x \sin x \, dx$$

$$(8) f(t) = \int_0^t \left[\int_0^x \sin^2 x \, dx \right]$$

2- إذا كان f اقترانا متصلاً قطعياً وذا ترتيب أسي على الفترة $[0, \infty)$ فبرهن أن :

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x) \, dx\right) = \frac{1}{s} \mathcal{L}(f) - \frac{1}{s} \int_0^s f(x) \, dx$$

لكل $a > 0$.

3- إذا كان f اقترانا متصلاً قطعياً وذا ترتيب أسي على $[0, \infty)$ وكان $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$ موجوداً

، فبرهن أن

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(s) = \int_s^\infty \hat{f}(\theta) \, d\theta$$

4- تحويل لابلاس وضرب الاقترانات (The Laplace Of The Product)

إذا كان $f, g \in E[0, \infty)$ فما علاقة $L(f \cdot g)$ بـ $L(f)$ و $L(g)$ ؟ إنه لسؤال صعب ، ولكن نستطيع أن نجيب عليه في حالات خاصة . وهذه هي مهمة هذا البند . وفي الحقيقة سوف نتعرف على $L(t^n \cdot f)$ و $L(e^s f)$ عندما يكون $f \in E[0, \infty)$.
والآن :

<p>نظرية 4.1 : إذا كان $f \in E[0, \infty)$ ، فإن :</p> $L(t^n \cdot f) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L(f)$

البرهان : سوف نبرهن النظرية لـ $n = 1$. أما الحالات الأخرى فهي شبيهة الفكرة . والآن :

$$L(t f) = \int_0^{\infty} e^{-st} t f(t) dt$$

وباستخدام نظريات الحساب المتقدم وبالتحديد نظرية لايبنيز (Leibniz's rule) فإن :

$$\frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} -t e^{-st} f(t) dt$$

أي أن :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} L(f) &= - \int_0^{\infty} t e^{-st} f(t) dt \\ &= -L(t f) \end{aligned}$$

وهذا ينهي البرهان .

نظرية 4.1 توصلنا لإيجاد $L(P(t) f(t))$ حيث $P(t)$ حدودية في t . وإليك بعض الأمثلة .

مثال (1) : جد لابلاس $(2t + 3)\sin 5t$.
الحل :

$$\begin{aligned} g(t) &= (2t + 3)\sin 5t \\ &= 2t \sin 5t + 3 \sin 5t \end{aligned}$$

وباستخدام نظرية 2.1 (خطية لابلاس) ونظرية 4.1 نحصل على :

$$\begin{aligned}
 L(g) &= -2 \frac{d}{dt} L(\sin 5t) + 3 L(\sin 5t) \\
 &= -2 \frac{d}{dt} \frac{5}{s^2 + 25} + 3 \frac{5}{s^2 + 25} \\
 &= \frac{20s}{(s^2 + 25)^2} + \frac{15}{s^2 + 25}
 \end{aligned}$$

والآن ندرس الحالة الثالثة الخاصة بالضرب :

ملحوظة 4.2 ، إذا كان $f \in E[0, \infty)$ ، فإن :

$$L(e^{-as} f)(s) = \hat{f}(s-a)$$

البرهان :

$$\begin{aligned}
 L(e^{-as} f)(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-as} f(t) dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} f(t) dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-ut} f(t) dt , \quad u = s+a \\
 &= \hat{f}(u) \\
 &= \hat{f}(s+a)
 \end{aligned}$$

وهذا ينهي البرهان . لقد كان البرهان سهلاً ! ألا ترى ذلك ؟

والآن إلى بعض الأمثلة .

مثال (2) ، جد لابلاس $t e^{-2t} \cos 5t$.

الحل :

$$\begin{aligned}
 g(t) &= t e^{-2t} \cos 5t \\
 &= t h(t)
 \end{aligned}$$

حيث $h(t) = e^{-2t} \cos 5t$. إذن

$$L(g) = -\frac{d}{ds} L(h)$$

ولكن حسب نظرية 4.2 ،

$$L(h)(s) = L(\cos 3t)(s+2)$$

$$L(\cos 3t) = \frac{s}{s^2 + 9} \quad \text{وحيث أن}$$

فإن :

$$L(h) = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 9}$$

ومنه

$$\begin{aligned} L(g) &= -\frac{d}{ds} \frac{s+2}{(s+2)^2 + 9} \\ &= -\frac{((s+2)^2 + 9) - (s+2)(2(s+2))}{((s+2)^2 + 9)^2} \\ &= \frac{(s+2)^2 - 9}{[(s+2)^2 + 9]^2} \end{aligned}$$

أتريد المزيد من الأمثلة . سوف نفعل ونعرض عليك أمثلة متميزة .

مثال (3) : جد لابلاس $t e^{2t} \sin(t+1)$.

الحل : أولا : ليس هناك قانون لتحويل لابلاس للاكتران $\sin(t+1)$. وعليه نعمل التالي :

$$\sin(t+1) = \sin t \cos 1 + \sin 1 \cos t$$

ومنه

$$\begin{aligned} t e^{2t} \sin(t+1) &= \cos 1 \cdot (t e^{2t} \sin t) + \sin 1 \cdot (t e^{2t} \cos t) \\ &= f_1 + f_2 \end{aligned}$$

وحيث أن تحويل لابلاس خطي ، فإن :

$$\begin{aligned} L(t e^{2t} \sin(t+1)) &= \cos 1 \cdot L(t e^{2t} \sin t) + \sin 1 \cdot L(t e^{2t} \cos t) \\ &= \cos 1 \left[-\frac{d}{ds} \frac{1}{(s-2)^2 + 1} \right] + \sin 1 \left[-\frac{d}{ds} \frac{s-2}{(s-2)^2 + 1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos 1 \frac{2(s-2)}{[(s-2)^2 + 1]^2} + \sin 1 \left[\frac{2(s-2)^2 - (s-2)^2 - 1}{((s-2)^2 + 1)^2} \right] \\
&= \frac{2\cos 1 \cdot (s-2) + \sin 1 \cdot [(s-2)^2 - 1]}{[(s-2)^2 + 1]^2}
\end{aligned}$$

هل تريد مزيداً من الأمثلة . سوف نعطيك ولكن في بند منفصل (بند المسائل المحلولة) .

مسائل

الوحدة السادسة

بند (4)

1- جد لابلوس الاقترانات التالية :

$$(1) f(t) = t^2 + e^t \sin 2t$$

$$(2) f(t) = 3t^2 - e^{2t}$$

$$(3) f(t) = e^{-t} \cos 3t + e^{2t} - 1$$

$$(4) f(t) = t^2 \sin t$$

$$(5) f(t) = 2t^2 e^{-t} - t + \cos 4t$$

$$(6) f(t) = t e^{2t} \cos 2t$$

$$(7) f(t) = \sin 2t \cos 5t$$

$$(8) f(t) = e^{7t} \sin^2 t$$

$$(9) f(t) = e^{-3t} \cos(2t + 4)$$

$$(10) f(t) = t^2 \sin\left(5t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$(11) f(t) = t^2 e^{2t} f'(t)$$

$$(12) f(t) = e^{2t+1} (3t + 1) \cos t$$

$$(13) f(t) = t^2 \int_0^t x' e^{2x} \sin x dx$$

$$(14) f(t) = e^{-3t} \int_0^t x \cos 4x dx$$

$$(15) f(t) = t e^t \int_0^t x \frac{d}{dx} (e^{2x} \sin x) dx$$

5- نظير لابلاس (Laplace Inverse)

كما ذكرنا مراراً ، فإن تحويل لابلاس أداة قوية لحل المعادلات التفاضلية ذات القيم الابتدائية . فهو يحول المعادلة التفاضلية إلى معادلة لا تحوي تفاضل . فهو يحول المعادلة التي تحوي على y, y', y'', \dots إلى معادلة تحوي فقط $\hat{y}(s)$. فإذا عرفنا $\hat{y}(s)$ نريد أن نعرف y وهنا يأتي دور نظير لابلاس . والذي سوف نرمز له بالرمز L^{-1} .

وحتى الآن نعرف القوانين التالية :

1. $L(1) = \frac{1}{s}$
2. $L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$
3. $L(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$
4. $L(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}$
5. $L(\sin at) = \frac{a}{s^2 + a^2}$

ومن هذه القوانين نستنتج القوانين التالية :

1. $L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1$
2. $L^{-1}\left(\frac{1}{s^n}\right) = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$
3. $L^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right) = e^{at}$
4. $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + a^2}\right) = \cos at$
5. $L^{-1}\left(\frac{a}{s^2 + a^2}\right) = \sin at$

وليس غريباً أن نقول إن الكميات $\frac{1}{s}, \frac{1}{s^2}, \frac{1}{s-a}, \frac{1}{s^2+a^2}, \frac{s}{s^2+a^2}$ هي المقادير الأساسية (حتى الآن) والتي نستطيع بواسطتها معرفة الكثير . وحتى نعرف نظير لابلاس لمقدار ما في s نحاول تغيير شكله وتغييره إلى أحد هذه المقادير الأساسية . والمقادير التي

يمكننا إيجاد نظير لابلاس لها حتى الآن هي المقادير التي بالشكل $\frac{P(s)}{Q(s)}$ حيث $P(s), Q(s)$

حدوديات في s (وبشرط أن $\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{P(s)}{Q(s)} < \infty$) أو التي يمكن أن تحول إلى $\frac{P(s)}{Q(s)}$.

ونلخص لك طريق إيجاد نظير لابلاس في الخطوات التالية :

[1] إن كان $\phi(s)$ ليس من الشكل $\frac{P(s)}{Q(s)}$ فلا بد من تحويله لهذا الشكل . وطريقة ذلك عن

طريق التفاضل بالنسبة للمتغير s . ومن الأمثلة على ذلك :

$$\phi(s) = \tan^{-1} \frac{1}{s} , \quad \phi(s) = \ln \left(\frac{s+1}{s+2} \right)$$

ونلاحظ كما لاحظت أنت أن :

$$\frac{d}{ds} \left[\ln \left(\frac{s+1}{s+2} \right) \right] = \frac{s+2}{s+1} \cdot \frac{1}{(s+2)^2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

وكذلك

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[\tan^{-1} \frac{1}{s} \right] &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{s} \right)^2} \left(-\frac{1}{s^2} \right) \\ &= \frac{-1}{1 + s^2} \end{aligned}$$

[2] إذا كان $\phi(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ ، يجب وضع $\phi(s)$ بشكل مجموع مقادير ، كل منها يكون

أحد المقادير الأساسية ، مع ملاحظة وجود إزاحة من حين لآخر والنتيجة عن الضرب ب e^{\dots} .
إن نحول وضع $\phi(s)$ بالشكل :

$$\phi(s) = \frac{b_1}{(s+a_1)^a} + \frac{b_2}{(s+a_2)^2 + c_2^2} + \frac{b_3(s+a_3)}{(s+a_3)^2 + c_3^2}$$

مع ملاحظة أنه يمكن أن تكون a_1 أو a_2 أو a_3 مساوية للصفر .

أما كيف نقوم بذلك فهناك وسيلتان :

(i) وسيلة إكمال المربع . وهذه تستخدم عندما يكون $\phi(s) = \frac{a_1s + b_1}{s^2 + a_2s + b_2}$ ، حيث $s^2 + a_2s + b_2$ غير قابلة للتحويل .

(ii) وسيلة الكسور الجزئية . وهذه تستخدم عندما يكون $\phi(s) = \frac{P(s)}{Q_1(s) \dots Q_n(s)}$ ، حيث Q_i حدودية إما أن تكون من الدرجة الأولى لو من الدرجة الثانية من الشكل $s^2 + b^2$.

وهنا يتبع على كاهلك عملية استرجاع وتذكر ذلك الجزء من حسابان (2) المتعلق بعملية التكمال باستخدام الكسور الجزئية . وسوف نقوم باستخدام الكسور الجزئية فافرضون أنك ملم بها .

والآن إلى الأمثلة التي توضح ذلك .

مثال (1) : جد نظير لابلاس لـ $\phi(s) = \frac{1}{s^2 + 4s - 5}$.

الحل :

$$\begin{aligned}\phi(s) &= \frac{1}{s^2 + 4s - 5} \\ &= \frac{1}{(s+5)(s-1)} \\ &= \frac{1}{6} \left[\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+5} \right]\end{aligned}$$

وهذه معادير أساسية .

وحيث أن تحويل لابلاس خطي فإن نظيره أيضاً خطي . إذن

$$\begin{aligned}L^{-1}(\phi(s)) &= \frac{1}{6} L^{-1} \left[\frac{1}{s-1} \right] - \frac{1}{6} L^{-1} \left[\frac{1}{s+5} \right] \\ &= \frac{1}{6} e^t - \frac{1}{6} e^{-5t}\end{aligned}$$

مثال (2) : جد نظير لابلاس لـ $\phi(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$.

الحل : هنا $s^2 + 2s + 2$ غير قابلة للتحويل . إذن نقوم بإكمال المربع لنحصل على :

$$\begin{aligned}\phi(s) &= \frac{1}{(s^2 + 2s + 2) + 2 - 1} \\ &= \frac{1}{(s+1)^2 + 1}\end{aligned}$$

وهذا مقدار أساسي . إذن

$$\mathcal{L}^{-1}(\phi(s)) = e^{-t} \sin t$$

مثال (3) : جد نظير لابلاس لـ $\phi(s) = \tan^{-1} \frac{1}{s}$.

الحل :

$$\frac{d\phi}{ds} = -\frac{1}{1+s^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{d\phi}{ds}\right) = -\sin t \quad \text{إذن}$$

ولكن هل تذكر قانون ($\mathcal{L}(t f(t))$) . تذكره به :

$$\mathcal{L}(t f(t)) = -\frac{d}{ds} \phi(s) , \quad \phi(s) = \hat{f}(s)$$

إذن

$$t f(t) = -\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{d}{ds} \hat{f}(s)\right)$$

$$f(t) = -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{d}{ds} \hat{f}(s)\right) \quad \text{وعليه}$$

إذن في حالتنا إذا كان $\mathcal{L}(f) = \phi$ ، فإن :

$$f(t) = -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{d\phi}{ds}\right)$$

$$= -\frac{1}{t} \sin t$$

وعليه

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(\phi(s)) = -\frac{\sin t}{t}$$

سؤال جميل ألا ترى ذلك .

مسائل

الوحدة السادسة

بند (5)

جد نظير لابلاس لما يلي :

$$(1) \frac{1}{s(s+1)}$$

$$(2) \frac{3}{(s-1)^2}$$

$$(3) \frac{1}{s(s+2)^2}$$

$$(4) \frac{5}{s^2(s-5)^2}$$

$$(5) \frac{1}{s^2 + 4s + 29}$$

$$(6) \frac{2s}{2s^2 + 1}$$

$$(7) \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}$$

$$(8) \frac{1}{(s^2 + 4)^3}$$

$$(9) \frac{3s^2}{(s^2 + 1)^2}$$

$$(10) \frac{2s^3}{(s^2 + 1)^3}$$

$$(11) \frac{1}{s^4 + 1}$$

$$(12) \frac{3s}{(s+1)^4}$$

$$(13) \ln\left(\frac{s+3}{s+2}\right)$$

$$(14) \ln\left(\frac{s^2 + 1}{s(s+3)}\right)$$

6- تحويل لابلاس والمعادلات التفاضلية (Laplace Transform And Differential Equations)

مضية هذا البند هو حل المعادلات التفاضلية .

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f$$

بالشروط

$$y(0) = b_0, y'(0) = b_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = b_{n-1}$$

والعوامل $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ قد تكون ثوابت وقد تكون اقترانات في x .

وسوف نعالج للحالتين : حالة a_n عندما تكون على شكل ثوابت وحالة a_n قد يكون بعضها

اقترانات في x .

وفي كلتا الحالتين طريق الحل هي :

1. نؤثر بتحويل لابلاس على طرفي المعادلة .
2. نستخدم قانون تحويل لابلاس على التفاضل .
3. نحصل في النهاية على :
$$\hat{y}(s) = \phi(s)$$
4. نؤثر بنظير لابلاس لنحصل على :
$$y(x) = \mathbf{L}^{-1}(\phi)$$

والآن لنحل أمثلة في حالة العوامل ثوابت .

مثال (1) : حل المعادلة :

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 4$$

الحل : نتبع الخطوات السابقة :

$$\mathbf{L}(y'' - 3y' + 2y) = \mathbf{L}(0)$$

إذن

$$\mathbf{L}(y'') - 3\mathbf{L}(y') + 2\mathbf{L}(y) = 0$$

ومنه

$$[s^2 \hat{y}(s) - sy(0) - y'(0)] - 3[s \hat{y}(s) - y(0)] + 2\hat{y}(s) = 0$$

نمسط لنحصل على :

$$s^2 \hat{y}(s) - 3s\hat{y}(s) + \hat{y}(s) = sy(0) + y'(0) - 3y(0) \\ = s \cdot 3 + 4 - 9$$

إذن

$$\hat{y}(s) = \frac{3s-5}{s^2-3s+2} \\ = \frac{3s-5}{(s-2)(s-1)} \\ = \frac{1}{s-2} + \frac{2}{s-1}$$

وبالتالي :

$$y = L^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) + 2L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) \\ = e^{2x} + 2e^x$$

مثال (2) : حل المعادلة :

$$y'' - y = x - 2, \quad y(2) = 3, \quad y'(2) = 0$$

المحل : هل لاحظت شيئاً غريباً في هذه المسألة .

أحسننا ، فالشروط الابتدائية أعطيت عند $x = 2$ وليس عند $x = 0$. ما العمل ؟ إليك البيان :

ضع $z(x) = y(x+2)$. ومنه نحصل على $z'(x) = y'(x+2)$ ، وكذلك

$$z''(x) = y''(x+2)$$

نعود إلى المعادلة ونضع مكان x المقدار $x+2$.

تصبح المعادلة :

$$y''(x+2) - y(x+2) = (x+2) - 2$$

وبالتعويض الآن عن y بدلالة z ، نحصل على :

$$z''(x) - z(x) = x \dots\dots\dots (*)$$

ولكن ما هي الشروط الآن ؟ ألا تعلم أن كل هذه المعركة هي من أجل نقل الشروط الابتدائية

من $x = 2$ إلى $x = 0$. ولقد نجحنا في ذلك فإن :

$$z(0) = y(0+2) = y(2) = 3$$

$$z'(0) = y'(0+2) = y'(2) = 0$$

إذن معادلتنا (*) جازمة للحل .

$$L(z'') - L(z) = L(x)$$

ومنه

$$[s^2 \hat{z} - sz(0) - z'(0)] - \hat{z} = \frac{1}{s^2}$$

إذن

$$(s^2 - 1)\hat{z} = \frac{1}{s^2} + sz(0) + z'(0)$$

وبالتعويض عن الشروط نحصل على :

$$\begin{aligned}\hat{z} &= \frac{1}{s^2(s^2 + 1)} + \frac{3s}{s^2 + 1} \\ &= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 1} + 3 \frac{s}{s^2 + 1}\end{aligned}$$

وباستخدام نظير لابلاس نحصل على :

$$z(x) = x^2 - \sin x + 3 \cos x$$

ولكن $z(x) = y(x+2)$. إذن

$$y(x+2) = x^2 - \sin x + 3 \cos x$$

ومنه

$$y(x) = (x-2)^2 - \sin(x-2) + 3 \cos(x-2)$$

ربما نكتفي بهذه الأمثلة كي ننتقل إلى الحالة الثانية حيث العوامل قد يكون فيها القترانات في x . وسنعالج هذه الحالة عبر الأمثلة .

مثال (3) : حل المعادلة

$$y'' + 3xy' - 6y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

الحل : نتبع نفس الخطوات في الأمثلة السابقة :

$$L(y'') + 3L(xy') - 6L(y) = \frac{1}{s}$$

وباستخدام قانون تحويل لابلاس على التفاضل والضرب بـ x نحصل على :

$$[s^2 \hat{y} - sy(0) - y'(0)] - 3 \frac{d}{ds} [s \hat{y} - y(0)] - 6 \hat{y} = \frac{1}{s}$$

وباستخدام الشروط الابتدائية نصل إلى :

$$s^2 \hat{y} - 3 \left[s \frac{d\hat{y}}{ds} + \hat{y} \right] - 6 \hat{y} = \frac{1}{s}$$

ومنه

$$\frac{d\hat{y}}{ds} + \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{3} \right) \hat{y} = \frac{-1}{3s^2}$$

هذه معادلة خطية في \hat{y} . فهي من الشكل :

$$z' + P(s)z = Q(s)$$

حيث $z = \hat{y}$.

وبحل المعادلة الخطية نحصل على :

$$\begin{aligned} \hat{y} &= e^{-\int P(s)ds} \left[e^{\int P(s)ds} \cdot Q(s) ds + C \right] \\ &= e^{-\int \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{3} \right) ds} \left[e^{\int \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{3} \right) ds} \cdot \frac{-1}{3s^2} ds + C \right] \\ &= \frac{1}{s^3} e^{\frac{s^2}{6}} \left[\int \frac{-s^3}{6s^2} e^{-\frac{s^2}{6}} ds + C \right] \\ &= \frac{1}{s^3} e^{\frac{s^2}{6}} \left[e^{-\frac{s^2}{6}} + C \right] \\ z(s) &= \frac{1}{s^3} + C \frac{e^{\frac{s^2}{6}}}{s^3} \end{aligned}$$

وحيث أن $z(s) = \hat{y}(s)$ ، فإن $\lim_{s \rightarrow \infty} z(s) = 0$ كما سلف في البند الثاني (نظرية 2.2) .

من هذا نستنتج أن $C=0$. وعليه $\hat{y}(s) = \frac{1}{s^3}$.

إنن :

$$y = \mathcal{L}^{-1}(\hat{y}) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3}\right) = \frac{x^2}{2}$$

وهذا ينتهي حل المسألة .

إنّ في مثل هذه المسائل نستخدم نظرية 2.2 (في البند الثاني) كي نجد ثابت (أو ثوابت التكامل) عندما نحل المعادلة في \hat{Y} والنتيجة من تكثير تحويل لابلاس على المعادلة التفاضلية ذات العوامل المتغيرة . وسوف نحل مسألة أخرى على هذا النمط في بند حل المسائل لهذه الوحدة .

مسائل

الوحدة الخامسة

بند (6)

حل للمعادلات التالية :

$$(1) y'' + y = e^{-2t} \sin t, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$$(2) y'' + 4y' + 4y = \cos t, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

$$(3) y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

$$(4) y'' + y' - 2y = e^{-t} \sin t, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$$(5) y'' + 3y' + 2y = t^2, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$$(6) y'' + 4y' + 4y = 4\cos 2t, \quad y(0) = y'(0) = 1$$

$$(7) y'' + 2y' + y = e^t, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$$(8) y'' - 4y' + 4y = 2e^{2t} + \cos t, \quad y(0) = \frac{3}{25}, y'(0) = -\frac{4}{25}$$

$$(9) y'' + 2y' + 3y = 3t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$$

7- تحويل لابلاس والاقترانات الخاصة (Laplace Transform And Special Functions)

في هذا البند سوف ندرس تحويل لابلاس لاقترانين متميزين مهمين في كثير من أفرع العلوم . هذان الاقترانان هما :

(i) اقتران القفزة .

(ii) الاقتران الدوري .

ولنبدأ البيان .

(i) اقتران القفزة .

تعريف 7.1 : اقتران القفزة هو الاقتران :

$$u_a : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

بحيث

$$u_a(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq a \\ 1 & t > a \end{cases}$$

وميزة هذا الاقتران أنه يسهل علينا إيجاد تحويل لابلاس للاقترانات من الشكل :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & 0 \leq x \leq a_1 \\ f_2(x) & 0 < x \leq a_2 \\ f_3(x) & a_2 < x \leq a_3 \\ \vdots & \\ f_n(x) & a_{n-1} < x \end{cases}$$

إذ يمكننا استخدام $u_a(t)$ لإعادة كتابة الاقتران f .
واليك بعض الأمثلة .

مثال (1) : أعد كتابة الاقتران التالي باستخدام اقتران القفزة :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

الحل : حيث أن

$$u_2(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq 2 \\ 1 & t > 2 \end{cases}$$

فإن $f(t) = 1 - u_2(t)$

مثال (2) : أعد كتابة الاقتران التالي باستخدام اقتران القفزة :

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \leq t \leq \pi \\ t & \pi < t \leq 5\pi \\ 1 & t > 5\pi \end{cases}$$

الحل : لا بد من الملاحظة أنه إذا كان $a < b$ ، فإن :

$$u_a(t) - u_b(t) = \begin{cases} 1 & a \leq t \leq b \\ 0 & t > b \end{cases}$$

وعليه فإننا نستطيع أن نكتب $f(t)$ على الشكل :

$$f(t) = \sin t (1 - u_\pi(t)) + t (u_\pi(t) - u_{5\pi}(t)) + u_{5\pi}(t)$$

وهنا لا بد أن نلفت نظرك إلى أن الاقتران $u_0(t)$ هو الاقتران الثابت $f(t) = 1$ لكل t في $(0, \infty)$.

من الأمثلة السابقة نستطيع أن نكتب لك قاعدة عامة عن شكل f بدلالة اقتران القفزة .

<p>قاعدة (1) : لنفرض $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ معطى بالشكل</p> $f(t) = \begin{cases} f_1(t) & 0 \leq t < a_1 \\ f_2(t) & a_1 \leq t < a_2 \\ f_3(t) & a_2 \leq t < a_3 \\ \vdots & \\ f_n(t) & t \geq a_{n-1} \end{cases}$ <p style="text-align: right;">فإن :</p> $f(t) = f_1(t) (1 - u_{a_1}(t)) + f_2(t) (u_{a_1}(t) - u_{a_2}(t)) + \dots + f_n(t) u_{a_{n-1}}(t)$
--

ولا بد من الملاحظة أن قيم f عند النقاط $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ ليس بالأمر المهم طالما بقي الاقتران متصلًا قطعياً . إذ أن تكامل الاقتران ما على الفترة $[0, \infty)$ لا يتغير إذا تغيرت قيم f عند عدد محدود من النقاط في $[0, \infty)$.

والآن عودة إلى تحويل لابلاس . والتضحية التي نهمنا هو إيجاد تحويل لابلاس للاقترانات التي ورد شكلها في قاعدة (1) . وعليه نحن بحاجة للنظرية المهمة التالية :

نظرية 7.1 ، (نظرية الإزاحة)

إذا كان $f \in E[0, \infty)$ ، فإن :

$$L(u_a(t) f(t)) = e^{-as} L(f(t+a))$$

البرهان : نعود فقط إلى تعريف تحويل لابلاس :

$$\begin{aligned} L(u_a(t) f(t))(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} u_a(t) f(t) dt \\ &= \int_a^{\infty} e^{-st} f(t) dt \end{aligned}$$

ونلك عندما استخدمنا تعريف $u_a(t)$ ، فهو يساوي صفر على $[0, a)$. والآن نريد من التكامل أن يبدأ من الصفر ، ولكن دون إقحام الاقتران اللقطة . وهذا يتم عن طريق التعويض : $t = x + a$. ومنه $dt = dx$ وكذلك $x = 0$ إذا كان $t = a$. إذن

$$\begin{aligned} L(u_a(t) f(t))(s) &= \int_0^{\infty} e^{-s(x+a)} f(x+a) dx \\ &= e^{-as} \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x+a) dx \\ &= e^{-as} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t+a) dt \\ &= e^{-as} L(f(t+a)) \end{aligned}$$

وهذا ينهي البرهان .

ولعلك في شوق إلى مثال . سنطعن ظمًا الشوق بالمثال التالي :

مثال (3) : جد لابلاس الاقتران

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq 2 \\ \sin t & t > 2 \end{cases}$$

الحل : نعيد كتابة الاقتران f بدلالة اقتران القفزة :

$$f(t) = u_2(t) \sin t$$

وعليه ، وباستخدام نظرية الإزاحة :

$$\begin{aligned} L(f) &= e^{-2s} L(\sin(t+2)) \\ &= e^{-2s} L[\sin t \cdot \cos 2 + \cos t \cdot \sin 2] \\ &= e^{-2s} \cos 2 \cdot \frac{1}{s^2+1} + e^{-2s} \sin 2 \cdot \frac{s}{s^2+1} \end{aligned}$$

هل تريد مثالا آخر ؟

مثال (4) : جد لابلاس الاقتران

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 1 \\ e^x & 1 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

الحل : نكتب f وفق قاعدة (1) لنحصل على :

$$f(x) = (1 - u_1(x))x^2 + (u_1(x) - u_4(x))e^x + u_4(x)$$

ومنه

$$\begin{aligned} L(f) &= L[(1 - u_1(x))x^2] + L[(u_1(x) - u_4(x))e^x] + L(u_4(x)) \\ &= L(x^2) - L(u_1(x) \cdot x^2) + L(u_1(x) \cdot e^x) - L(u_4(x) \cdot e^x) + L(u_4(x) \cdot 1) \end{aligned}$$

وباستخدام نظرية الإزاحة نحصل على :

$$\begin{aligned} L(f) &= \frac{2}{s^3} - e^{-s} L[(x+1)^2] + e^{-s} L(e^{x+1}) - e^{-4s} L[e^{x+4}] + e^{-4s} L(1) \\ &= \frac{2}{s^3} - e^{-s} \left[\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \right] + e^{-s} \cdot e \cdot \frac{1}{s-1} - e^{-4s} \cdot e^4 \cdot \frac{1}{s-1} + e^{-4s} \cdot \frac{1}{s} \end{aligned}$$

هل تريد أن نبسط لك هذا المقدار . لن نفعل !

والآن ننتقل بك إلى الاقتران الدوري .

تعريف 7.2: نقول ان الاقتران $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ اقتران دوري بدورة مقدارها τ إذا كان $f(t + \tau) = f(t)$ لكل t في $[0, \infty)$.

ومن أمثلة الاقترانات الدورية والتي تعرفت عليها في دراستك للحصان : $f(x) = \sin x$ ودورته $\tau = 2\pi$ ، $f(x) = \cos x$ ، ودورته $\tau = 2\pi$ ، $f(x) = \tan x$ ، ودورته $\tau = \pi$.

ويمكن ذكر خاصيتين أساسيتين للاقترانات الدورية :

1- إذا كان f دورياً بدورة مقدارها τ فإنه دوري بدورة مقدارها 2τ . وبالتالي دوري

بدورة مقدارها 3τ ، 4τ ،

2- لمعرفة اقتران دوري (على مجاله) ، يكفي معرفة f على إحدى الفترات

$[0, \tau]$ ، $[\tau, 2\tau]$ ،

والآن ما هو تحويل لابلاس للاقتران الدوري . الجواب في النظرية التالية :

نظرية 7.2: إذا كان f اقتراناً دورياً وعصراً في $E[0, \infty)$ ، فإن

$$L(f) = \frac{\int_0^{\tau} e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-s\tau}}$$

حيث τ هي دورة الاقتران f .

البهتان : من التعريف :

$$L(f) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

وحيث أن f دوري بدورة مقدارها τ ، فإن :

$$\begin{aligned}
L(f) &= \int_0^1 e^{-u} f(t) dt + \int_1^{2^1} e^{-u} f(t) dt + \dots \\
&= \int_0^1 e^{-u} f(t) dt + \int_0^1 e^{-4^{(n-1)}} f(t) dt + \dots \\
&= \int_0^1 e^{-u} f(t) dt [1 + e^{-u} + e^{-2u}] \\
&= \int_0^1 e^{-u} f(t) dt \left[\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-u})^n \right]
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad : \text{ومن قانون المتسلسلة الهندسية}$$

نحصل على :

$$L(f) = \frac{\int_0^1 e^{-u} f(t) dt}{1 - e^{-u}}$$

وهذا ينهي البرهان .

والآن إلى بند آخر .

مسائل

الوحدة السادسة

بند (7)

جد لابلاس الاكترانك التالية :

$$(1) f(t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{1}{2} \\ 1+t & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(2) f(t) = \begin{cases} t & t < 2 \\ 2 & t \geq 2 \end{cases}$$

$$(3) f(t) = \begin{cases} \sin t & t < 2\pi \\ 0 & t \geq 2\pi \end{cases}$$

$$(4) f(t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{\pi}{2} \\ \cos t & \frac{\pi}{2} \leq t < \frac{3\pi}{2} \\ 0 & t \geq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$(5) f(t) = \begin{cases} t & t < 2 \\ 8-3t & 2 \leq t < 3 \\ t-4 & 3 \leq t < 4 \\ 0 & t \geq 4 \end{cases}$$

حل المعادلات التالية :

$$(6) y^{(4)} + y = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq 1 \\ t-1 & t > 1 \end{cases}$$

$$(7) y'' + 2y' + y = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

$$(8) y'' + y = u_*(t), \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

8- التلاف (Convolution)

موضوع التلاف من المواضيع المهمة في الرياضيات التطبيقية والهندسة . وسوف نعرضه عليك موضوعاً رياضياً بحثاً لا ثنية فيه . فإلى التعريف ندعوك :

تعريف 8.1 : لنفرض أن f, g ائترانان متصلان قطعياً على $(0, \infty)$. إن تلاف f و g هو الائتران الذي سنرمز له بالرمز $f * g$ والمعروف بالشكل :

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-x) g(x) dx$$

وبرهان النظرية التالية يحتاج إلى تحليل متقدم ولذلك رفع الله عنك تكليف فهمه . ونطلب منك إدراك منطوق ومفهوم نص النظرية .

نظرية 8.1.2 : إذا كان $f, g \in E[0, \infty)$ ، فإن $f * g \in E[0, \infty)$

هل تريد بعض الأمثلة على التلاف . سنسايرك في ذلك .

مثال (1) : جد $1 * 1$.

الحل : حسب التعريف :

$$(1 * 1)(t) = \int_0^t 1 \cdot 1 dx = t$$

مثال (2) : جد $\sin t * 1$.

الحل : مرة أخرى نعمل التعريف لنحصل على :

$$\begin{aligned} (\sin t * 1)(t) &= \int_0^t \sin(t-x) \cdot 1 dx \\ &= \int_0^t \sin t \cdot \cos x - \cos t \cdot \sin x dx \\ &= \sin t [\sin t - 0] - \cos t [-\cos t + 1] \\ &= \sin^2 t + \cos^2 t - \cos t \\ &= 1 - \cos t \end{aligned}$$

لعلك لاحظت أن عملية التلاف هي عملية مغلقة على $E[0, \infty)$ ، حيث ذلك ما أكدته لنا

نظرية 7.1 . وعملية التلاف لها خصائص أخرى نترك برهانها لك كي تستمتع بروعة استنباطه .

وهذه الخصائص نوردتها في النظرية التالية .

نظرية 8.2 : لنفرض أن $f, g, h \in E[0, \infty)$. فإن

1. $f * g = g * f$
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$
3. $f * (g + h) = f * g + f * h$
4. $f * 0 = 0$

إن عملية التلاف عملية إبدالية ، تجميعية ، وتوزع على الجمع . لكنك لاحظت من مثال (1) أن $f(t) = 1$ ليس عنصراً محايداً للعملية $*$. بل إن الحقيقة المرة أن عملية التلاف على $E[0, \infty)$ ليس لها عنصر محايد . وهذا الأمر ليس سهل البرهان .

والآن ما علاقة عملية التلاف بتحويل لابلاس والجواب في النظرية الجميلة التالية :

نظرية 8.3 : لنفرض أن $f, g \in E[0, \infty)$. فإن

$$L(f * g) = L(f) \cdot L(g)$$

البرهان : وفق تعريف التلاف وتحويل لابلاس نحصل على :

$$\begin{aligned} L(f * g) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \left(\int_0^t f(t-x) g(x) dx \right) dt \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^t e^{-st} f(t-x) g(x) dx dt \end{aligned}$$

وهذا تكامل ثنائي على المنطقة المحدود بـ :

$$0 \leq x \leq t, \quad 0 \leq t \leq \infty$$

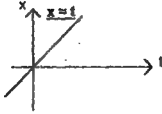


Fig.(1)

ومن معلوماتنا التي اكتسبناها من مادة حسابان (3) ، إذا أردنا تغيير ترتيب التكامل نحصل على :

$$\begin{aligned} L(f * g) &= \int_0^{\infty} \left(\int_x^{\infty} e^{-st} f(t-x) g(x) dt \right) dx \\ &= \int_0^{\infty} g(x) \left(\int_x^{\infty} e^{-st} f(t-x) dt \right) dx \end{aligned}$$

ويمكننا التعبير في التكامل الداخلي : $y = t - x$ ، نحصل على

$$\begin{aligned} L(f * g) &= \int_0^{\infty} g(x) \int_0^{\infty} e^{-sy} e^{-sx} f(y) dy dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-sx} g(x) dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-sy} f(y) dy \\ &= L(f) \cdot L(g) \end{aligned}$$

وهذا ينهي البرهان .

والآن إلى بعض الأمثلة .

مثال (3) : حدد تحويل لابلاس للقران $\sin t * \cos t$.
الحل :

$$\begin{aligned} L(\sin t * \cos t) &= L(\sin t) \cdot L(\cos t) \\ &= \frac{1}{s^2 + 1} \cdot \frac{s}{s^2 + 1} \\ &= \frac{s}{(s^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

ونستنتج من نظرية 7.3 ، نظرية تتعلق بنظير لابلاس .

نظرية 8.4 : إذا كان $\phi_1(s)$, $\phi_2(s)$ موجودان في $\hat{E}[0, \infty)$ ، فإن :

$$L^{-1}(\phi_1 \cdot \phi_2) = L^{-1}(\phi_1) * L^{-1}(\phi_2)$$

وهذه فقط إعادة صياغة (أو كتابة) نظرية 7.3 .

مثال (4) : جد نظير لابلاس لـ : $\phi(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$.

الحل :

$$\phi(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s+1}$$

وعليه :

$$\begin{aligned} L^{-1}(\phi) &= L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) * L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) \\ &= 1 * e^{-t} \end{aligned}$$

مثال (5) : جد $L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right)$.

الحل :

$$\phi(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

ومنه

$$\begin{aligned} L^{-1}(\phi) &= L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) * L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) \\ &= 1 * \sin t \end{aligned}$$

ونقف هنا لننتهي هذا البند كي نبحر معاً إلى أطراف نهاية هذه الوحدة .

8- أمثلة متنوعة (Solved Examples)

نعرض لك في هذا البند مجموعة من الأمثلة المحولة هي في غاية الجمال .

مثال (1) : جد لابلاس الاقتران $f(t) = \frac{\sin t}{t}$.

الحل : حيث أن $f(t) = \frac{\sin t}{t}$

فإن $\sin t = t f(t)$. ومنه

$$L(\sin t) = L(t f(t)) = -\frac{d}{ds} L(f(t))$$

وعليه

$$\frac{d}{ds} L(f(t)) = -\frac{1}{s^2 + 1}$$

وعليه

$$\hat{f}(s) = -\tan^{-1} s + C$$

ولكن حتى يكون $\hat{f}(s)$ هو تحويل لابلاس لاقتران ما ، فإن الشرط $\lim_{s \rightarrow \infty} \hat{f}(s) = 0$ لا بد

أن يتحقق . وحيث أن $\lim_{s \rightarrow \infty} \tan^{-1} s = \frac{\pi}{2}$ ، فإن $C = \frac{\pi}{2}$. وعليه

$$L\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s$$

مثال (2) : جد لابلاس الاقتران $f(t) = e^{2t-1} \int_0^t x^{127} e^x dx$.

الحل : هنا $f(t) = e^{2t-1} \cdot g(t)$ حيث $g(t) = \int_0^t x^{127} e^x dx$. إذن

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) &= L(e^{2t-1} \cdot g(t)) \\ &= L(e^{2t} \cdot e^{-1} \cdot g(t)) \\ &= e^{-1} L(g(s-2)) \end{aligned}$$

ولكن حسب نظرية 3.2 ، فإن $\hat{g}(s) = \frac{1}{s} L(e^t \cdot t^{127})$.

ولكن من نظرية 4.1 ومن قانون $L(t^n)$ ، فإن :

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{s} \left[\frac{(127)!}{(s-1)^{128}} \right]$$

وعليه

$$\hat{f}(s) = e^{-1} \cdot \frac{1}{s-2} \cdot \frac{(127)!}{(s-3)^{128}}$$

مثال (3) : إذا كان $f \in E[0, \infty)$ ، فبرهن أن هناك $a > 0$ بحيث أن $g(s) = s \hat{f}(s)$ هو اقتران محدود على $[a, \infty)$.

الحل : حيث أن $f \in E[0, \infty)$ ، فإن

$$|f(t)| \leq m e^{at}$$

ومنه $|\hat{f}(s)| \leq \frac{m}{s-a}$. وعليه

$$|s \hat{f}(s)| \leq m \cdot \frac{s}{s-a}$$

وحيث أن $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{ms}{s-a} = m$ ، فإن $s \hat{f}(s)$ محدود في بعض جوار ∞ . أي أن هناك

a بحيث $s \hat{f}(s)$ محدود على (a, ∞) .

ما ألفت هذا البرهان وأتصره .

مثال (4) : جد لابلاس $f(t) = e^{2-t} \sin(2t+1)$.

الحل :

$$\begin{aligned} f(t) &= e^2 \cdot e^{-t} [\sin 2t \cos 1 + \cos 2t \sin 1] \\ &= e^2 \cos 1 \cdot e^{-t} \sin 2t + e^2 \sin 1 e^{-t} \cdot \cos 2t \end{aligned}$$

وعليه

$$\hat{f}(s) = e^2 \cos 1 \cdot \frac{2}{(s+1)^2 + 4} + (e^2 \sin 1) \cdot \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4}$$

مثال (5) : جد نظير لابلاس $\phi(s) = \frac{1}{s(s-1)}$.

الحل :

هناك طريقتان لحل هذه المعادلة . أما الطريقة الأولى فهي طريقة الكسور الجزئية وقد سلف

أن عرضنا بعض الأمثلة عليها ، ونتركها لك الآن . أما الطريقة الثانية فهي طريقة التلاف :

$$\phi(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s-1}$$

ومنه

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(\phi(s)) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) * \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) \\ &= 1 * e^t \\ &= \int_0^t e^{t-x} dx \\ &= e^t \cdot \int_0^t e^{-x} dx = e^t \cdot [-e^{-x}]_0^t \\ &= -1 + e^t \end{aligned}$$

مثال (6) : جد نظير لابلاس $\phi(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$

الحل :

$$\phi(s) = \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

وعليه

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(\phi(s)) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) * \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) \\ &= \sin t * \sin t \end{aligned}$$

وإذا أجرينا حساب التلاف لوجدنا :

$$\sin t * \sin t = \frac{\sin t - t \cos t}{2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)^2}\right) = \frac{\sin t}{2} - \frac{t \cos t}{2} \quad \text{إن}$$

مثال (7) : حل المعادلة

$$y'(t) = 1 - y * e^{-2t}, \quad y(0) = 1$$

الحل : نأخذ لابلاس للطرفين للمعادلة لنحصل على :

$$s \hat{y}(s) - y(0) = \frac{1}{s} - \hat{y}(s) \frac{1}{s+2}$$

ومنه

$$s \hat{y}(s) + \frac{1}{s+2} \hat{y}(s) = \frac{1}{s} + 1$$

وهذا يعني

$$\hat{y}(s) = \frac{s+2}{s(s+1)}$$

وبطريقة الكسور الجزئية نحصل على :

$$\hat{y}(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+1}$$

ومنه نحصل على :

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) \\ &= 2 - e^{-t} \end{aligned}$$

نكتفي بهذا العدد من الأمثلة لننتهي وحدة ال لابلاس .

مسائل

الوحدة السادسة

بند (8)

جد :

$$(1) e^a * e^a$$

$$(2) t * \cos at$$

$$(3) 1 * 1$$

$$(4) t * e^a$$

جد حلًا للمعادلات التالية :

$$(5) y = 4t - 3 - \sin t * y$$

$$(6) y = 3 \sin t - 2 \cos t * y$$

$$(7) y = \sin t + 4e^{-t} - 2 \cos t * y$$

$$(8) y = t - t * y$$

$$(9) y = t - e^t * y$$

$$(10) y = \cos t + e^t * y$$

جد نظير لابلاس للاعترافات التالية باستخدام التلاف :

$$(11) \frac{1}{s^2 - 3s + 2}$$

$$(12) \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

$$(13) \frac{1}{s^2 + 2s^2 - s - 2}$$

$$(14) \frac{1}{s^2(s+1)}$$

$$(15) \frac{s}{(s-1)(s^2+1)}$$

$$(16) \frac{1}{(s+1)(s^2+1)}$$

$$(17) \frac{1}{s(s^2+4s+13)}$$

$$(18) \frac{1}{s(s^2+16)}$$

الوحدة السابعة

الحل بالمتسلسلات

' Series Solution '

في حل المعادلات التفاضلية ذات العوامل المتغيرة ، لم يكن لدينا طرق أو خيارات كثيرة ، وكانت المعادلة الوحيدة من هذا النوع القادرين على حلها حلًا كاملاً هي معادلة أبلر .
والحل بالمتسلسلات هو من الطرق القوية وذات الفعالية لحل المعادلات التفاضلية ذات العوامل المتغيرة .
والخاتمة من هذا البند هو إثبات وجهة نظرنا هذه .

1- معلومات عامة .

نعلم أنك تعرف الكثير عن المتسلسلات من خلال دراستك لمادة الحساب . ولكن نريد أن نذكرك ليس غير . فربما تراكمت فوق قرص ذاكرتك بعض الأثرية . تعرف أن أفضل أنواع الإقترانات التي يحلم بها العامل في حقل الرياضيات هي

الحدوديات : $P(x) = \sum_{n=0}^k a_n x^n$. ولكن هناك اقترانات جميلة كالحوديات مثل $f(x) = e^x$, $f(x) = \sin x$, فهل يمكن تمثيل هذه الاقترانات بشكل يشبه الحدوديات ؟ هنا تظهر غاية للمتسلسلات الأسية . وهناك نظرية أساسية تعلمتها في الحساب هي :

النظرية 1.1 (تيلور) : إذا كان $x_0 \in \mathbb{R}$ وكان f اقتراناً معرفاً على فترة I تحوي x_0 وله مشتقة من كل الرتب على I وكان $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(z)(x-x_0)^{n+1}}{n!} = 0$ ، حيث تقع z بين x و x_0 ، فإن f يمكن تمثيله بالشكل .

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} \dots\dots\dots (1)$$

وهذا التمثيل صحيح في فترة ما حول x_0 لنقل $I \supseteq J$.

تسمى المتسلسلة (1) متسلسلة تيلر . إذا كان $x_0 = 0$ ، فإنها تسمى متسلسلة ماكلورين . وباستخدام هذه النظرية استطعنا في مادة الحساب تمثيل كثير من الإقترانات بشكل متسلسلات أسية . ومن الأمثلة :

$$(i) \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(ii) \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(iii) \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(iv) \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad , \quad x \in (-1, 1)$$

والفترة التي تمثل فيها المتسلسلة الإقتران تسمى فترة التقارب . ولعلك تذكر أن طريقة إيجاد

فترة التقارب للمتسلسلات الأسية هي باستخدام اختبار النسبة . ومن أشهر النظريات في هذا الإتجاه هي :

نظرية 1.2 ، إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ تمثل الاقتران f على فترة ما I ، حول x_0 ، فإن :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n (x-x_0)^{n-1} \quad \text{لكل } x \text{ في } I \text{ ، وكذلك}$$

$$\int f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1} \quad \text{لكل } x \text{ في } I .$$

ويمكن استخدام هذه النظرية لإيجاد متسلسلات كثيراً من الاقترانات . ومن الأمثلة على ذلك :

مثال (1) : جد متسلسلة أسية حول $x_0 = 0$ لكل من :

$$(i) f(x) = \ln|1+x| \quad , \quad (ii) f(x) = \tan^{-1} x$$

الحل : (i) هنا نلاحظ أن

$$\begin{aligned} \ln|1+x| &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \\ &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

(ii) قبل البدء في هذا الجزء يجب أن نتذكر القانون (من مادة حساب) .

$$\frac{1}{1+u} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^n \quad , \quad u \in (-1, 1)$$

والآن

$$\begin{aligned} \tan^{-1} x &= \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right) dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

ونتهي هذا البند بإعطاء إسم لتلك الإقرانات التي لها متسلسلة أسية حول نقطة ما .

تعريف 1.1 : يسمى الاقران f تحليلي حول النقطة x_0 إذا كان f له متسلسلة أسية حول x_0 بحيث $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ لكل x في فترة ما حول x_0 .

مسائل

الوحدة المسابعة

بند (1)

جد متسلسلة الاكترانات التالية حول النقطة المعطاة .

$$(1) \quad f(x) = \ln x, \quad x_0 = 1$$

$$(2) \quad f(x) = e^x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$(3) \quad f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}, \quad x_0 = 0$$

$$(4) \quad f(x) = \sin x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$(5) \quad f(x) = \frac{1+x}{1-x}, \quad x_0 = 0$$

$$(6) \quad \int_0^x e^{t^2} dt, \quad x_0 = 0$$

2- حل المعادلات بمسلسلة تيلر (Taylor Series Method)

ملخص هذه الطريقة لحل المعادلات التفاضلية حول نقطة ما هو :

إذا كانت المعادلة التفاضلية مثلاً : $y' = f(x, y)$ ، فلتنا نفرض أن y له متسلسلة تيلر تمثلها

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \text{وبذلك يكون } x_0 \text{ .}$$

وبالتالي نعرف y تماماً إذا عرفنا المقادير $y^{(n)}(x_0)$.

ونحصل على تلك المقادير باستخدام المعادلة التفاضلية .

والإليك بيان ذلك عبر مثال نلطف فيه جوّ التجريد .

مثال (1) : استخدم متسلسلة تيلر لحل المعادلة التفاضلية :

$$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 1$$

جد فقط أول ستة حدود من المتسلسلة .

الحل : هنا $x_0 = 0$ ، حيث أخذنا ذلك من الشرط الأولي .

ونفرض أن y له تمثيل بمتسلسلة تيلر حول $x = 0$. وعليه

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$= y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + \dots$$

وعليه نعرف y إذا عرفنا $y(0), y'(0), y''(0), \dots$.

ولكن $y(0) = 1$ وكذلك $y' = 1 + y^2$. ومنه $y'(0) = 1 + y^2(0) = 2$. وأيضاً

$$y'' = 2y'y' \quad \text{ومنه} \quad y''(0) = 2y'(0)y(0) = 4 \quad \text{وهكذا يمكننا أن نحصل على}$$

$$y^{(n)}(x_0) \text{ لكل } n \text{ .}$$

وإذا حسبنا $y^{(n)}(0)$ حتى $n = 5$ مثلاً نحصل على ستة حدود من متسلسلة الحل :

$$y(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{8x^3}{3} + \frac{10x^4}{3} + \frac{64x^5}{15} + \dots$$

مثال (2) : جد أول ثلاثة حدود (غير صفرية) من متسلسلة تيلر لحل المعادلة :

$$y'' + \sin y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

الحل : مرة أخرى ، الحل حول $x = 0$. وعليه يكون شكل الحل :

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + y''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots$$

وكل ما علينا عمله هو محاولة إيجاد $y^{(n)}(0)$. ولكن معطى لنا $y(0)$ و $y'(0)$.
 إذن علينا إيجاد $y^{(n)}(x_0)$ لكل $n \geq 2$.

ولكن $y''(x) = -\sin y$ وعليه $y''(0) = -\sin(y(0))$ ومنه $y''(0) = -\sin 1$.
 والآن :

$$y'''(x) = -\cos y \cdot y'$$

وعليه

$$\begin{aligned} y'''(0) &= -\cos(y(0)) \cdot y'(0) \\ &= (\cos 1) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

حتى الآن لدينا حدان غير صفريان ولا بد من إيجاد حد ثالث .

$$\begin{aligned} y^{(4)} &= -\frac{d}{dx} [\cos y \cdot y'] \\ &= -[-(\sin y) y' \cdot y' + \cos y \cdot y''] \\ &= y'^2 \sin y - y'' \cos y \end{aligned}$$

وعليه

$$\begin{aligned} y^{(4)}(0) &= 0 \cdot \sin y(0) - y''(0) \cos y(0) \\ &= +\sin 1 \cdot \cos 1 \end{aligned}$$

إذن أول ثلاثة حدود غير صفريّة :

$$\begin{aligned} y(0) + y''(0)\frac{x^2}{2!} + y^{(4)}(0)\frac{x^4}{4!} \\ = 1 - (\sin 1)\frac{x^2}{2} + (\sin 1 \cdot \cos 1)\frac{x^4}{4!} \end{aligned}$$

ونقف عند هذا الحد لنرحل إلى بند آخر .

مسائل

الوحدة السابعة

بند (2)

باستخدام متسلسلة تيلر ، جد أول أربعة حدود من متسلسلة حل المعادلات التالية :

$$(1) \quad y' = x^2 + y^2 \quad , \quad y(-1) = -1$$

$$(2) \quad y' = 2xy \quad , \quad y(0) = 1$$

$$(3) \quad y' = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad y(0) = 1$$

$$(4) \quad y' = e^x y^2 + 3 \sin x \quad , \quad y(0) = 1$$

$$(5) \quad y'' = -\sin y \quad , \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

$$(6) \quad y'' = -4x^2 y - 2 \sin x^2 \quad , \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

$$(7) \quad y'' = y' \ln y + x \quad , \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$$

3- النقاط الطبيعية والمتفردة للمعادلات التفاضلية (Ordinary and singular points of differential equations)

عبارة " نريد أن نحل المعادلة التفاضلية " تعني حتماً حلاً في مجال ما . أي حلاً حول نقطة ما . والنقاط التي يمكن حلّ المعادلة التفاضلية حولها تعتمد في واقعها على عوامل المعادلة التفاضلية . وفي هذا البند سوف نقوم بدراسة تلك النقاط .

والآن : لنفرض أن

$$p(x) y'' + q(x) y' + r(x) y = 0 \dots\dots\dots (*)$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية بحيث أن العوامل p , q , r هي اقترانات تحليلية .

تعريف 3.1 : (i) تسمى النقطة x_0 نقطة عادية للمعادلة التفاضلية (*) إذا كان $\frac{q(x)}{p(x)}$ و $\frac{r(x)}{p(x)}$ اقترانين تحليليين عند النقطة x_0 .
(ii) تسمى النقطة x_0 نقطة متفردة للمعادلة التفاضلية (*) إذا لم تكن x_0 نقطة عادية .

وإذا لاحظت (ونحسبك كذلك) أن النقاط المتفردة هي نقاط المشاكل للمقدارين $\frac{r(x)}{p(x)}$ و $\frac{q(x)}{p(x)}$

وحيث أننا نفرض في تعريف 3.1 أن p , q و r هي اقترانات تحليلية فإن نقاط المشاكل للكسور $\frac{r}{p}$ و $\frac{q}{p}$ هي أصفار المقام . وعليه فإن كل نقطة لا يساوي المقام " $p(x)$ " عندها صفراً هي نقطة عادية . في حين لأصفار $p(x)$ هي النقاط التي يطلب على الظن أن تكون النقاط المتفردة للمعادلة .

ونقول هنا " يتطلب على الظن " إذ قد يكون p يساوي صفرًا عند نقطة ما x_0 مثلاً ولكن في الوقت ذاته يكون $q(x_0)$ و $r(x_0)$ كليهما صفرًا . إذ في هذه الحالة قد يعادل صفر البسط صفر المقام وتلغى المشكلة . وسنبين ذلك في الأمثلة .

مثال (1) : عين النقاط المتفردة والعادية للمعادلة :

$$x^2(x-1)y'' + e^x y' + y = 0$$

الحل : هنا

$$p(x) = x^2(x-1) , \quad q(x) = e^x , \quad r(x) = 1$$

وإصغار $p(x)$ هي $x=0$, $x=1$ وهي نقاط المشاكل للمعادلة .

والآن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{q(x)}{p(x)}$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{q(x)}{p(x)}$ غير موجودان . وكذلك الأمر بالنسبة لـ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{p(x)} , \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{r(x)}{p(x)}$$

وعليه $\frac{q(x)}{p(x)}$ و $\frac{r(x)}{p(x)}$ ليسا تحليليين عند $x=0$, $x=1$.

إذن النقاط $x=0$, $x=1$ هي نقاط متفردة . وأما ما دون ذلك فهي نقاط عادية . أي أن

النقاط العادية هي $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$.

مثال (2) : عين النقاط المتفردة والعادية للمعادلة :

$$x y'' + \sin x y' + x^2 y = 0$$

$$\frac{r(x)}{p(x)} = \frac{x^2}{x} \quad \text{و} \quad \frac{q(x)}{p(x)} = \frac{\sin x}{x} \quad \text{الحل :}$$

وعليه فإن نقطة المشاكل الوحيدة هي $x=0$. وحيث أن $\frac{q(x)}{p(x)}$ و $\frac{r(x)}{p(x)}$ هي اقترانات

تحليلية عند كل النقاط في \mathbb{R} ما عدا عند $x=0$ ، فإن $x=0$ هي نقطة عادية إذا كان

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{p(x)} , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{q(x)}{p(x)}$$

موجودين ومحدودين .

وفي حالتنا : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$. وعليه فإن $x = 0$ نقطة عادية .
وبالتالي فإن كل نقاط \mathbb{R} هي نقاط عادية .

ونكتفي بهذين المثالين لتكمل دراستنا لنقاط المشاكل للمعادلة التفاضلية .
وليس كل النقاط المتفردة هي نقاط سوء . بل فيها ما يمكن أن نعالج المعادلة التفاضلية حوله .
وهذا يستدعي للتحريف التالي :

تعريف 3.2 : لنفرض أن x_0 هي نقطة متفردة للمعادلة :

$$p y'' + q y' + r y = 0$$
 .
 نسمي x_0 نقطة متفردة نظامية إذا كان الاقترانان :

$$(x - x_0)^2 \frac{r(x)}{p(x)} \quad \text{و} \quad (x - x_0) \frac{q(x)}{p(x)}$$
 تحليليين .
 وفي غير تلك الحالة نسمي x_0 نقطة غير منفردة غير نظامية .

ومن الأمثلة على ذلك :

مثال (3) : عين النقاط المنفردة النظامية وغير النظامية للمعادلة :

$$(1 - x^2) y'' - 2x y' + y = 0$$

الحل :

$$\frac{r(x)}{p(x)} = \frac{1}{1 - x^2} \quad , \quad \frac{q(x)}{p(x)} = \frac{-2x}{1 - x^2}$$

ونقاط المشاكل هي $\{-1, 1\}$. وحيث أن

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 \frac{r(x)}{p(x)} = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \frac{q(x)}{p(x)} = 1$$

وعليه كلا النقطتين نظاميتين .

هل تريد مثالا صعباً ؟ هو ذلك :

مثال (4) : عين النقاط المتفردة النظامية وغير النظامية للمعادلة :

$$x \cos x \, y'' + 3y' + \frac{2}{x^2(x-4)^2} y = 0$$

العمل :

$$\frac{r(x)}{p(x)} = \frac{2}{x^2(x-4)^2 \cos x} \quad , \quad \frac{q(x)}{p(x)} = \frac{3}{x \cos x}$$

وعليه تكون نقاط المشاكل هي $\{0, 4\} \cup \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z} \right\}$.

أما $x = 0$ فإنها غير نظامية وذلك لأن

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{r(x)}{p(x)} \text{ غير موجودة . وعليه } x^2 \frac{r(x)}{p(x)} \text{ ليس تحليلياً عند } x = 0 .$$

لما $x = 4$ فهي نظامية وذلك لأن

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x-4)^2 \frac{r(x)}{p(x)} = \frac{2}{16 \cos 4} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 4} (x-4) \frac{q(x)}{p(x)} = 0$$

أما عند النقاط $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ فلذلك قادر بنفسك أن تجد :

$$\lim_{x \rightarrow (2n+1)\frac{\pi}{2}} \left(x - (2n+1)\frac{\pi}{2} \right)^2 \frac{r(x)}{p(x)} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow (2n+1)\frac{\pi}{2}} \left(x - (2n+1)\frac{\pi}{2} \right) \frac{q(x)}{p(x)}$$

وسنحتاج لإيجاندهما إلى قانون لوبيتال ، وسوف تجد أنهما موجودان . وعليه جميعها نقاط منفردة نظامية .

وفي ختام هذا البند نخبرك بما يلي :-

نستطيع أن نحل المعادلة التفاضلية حول النقاط العادية والنقاط المنفردة النظامية . ولا نستطيع قبل ذلك حول النقاط غير النظامية .

فإلى التفصيل ندعوك .

مسائل

الوحدة العاشرة

بنء (3)

ءءء النقاء المنفرءة لكل من المعاءلات الآآلة :

$$(1) (1-x)y'' + \frac{3x}{x+2}y' + \frac{(1-x)^2}{x+3}y = 0$$

$$(2) (x^2+x)y'' + \frac{x^2}{x-1}y' + \frac{x^4+3x}{x+2}y = 0$$

$$(3) \frac{1}{x}y'' + \frac{3(x-4)}{x+6}y' + \frac{x^2(x-2)}{x-1}y = 0$$

$$(4) (x^2+3x+2)y'' + \frac{x+2}{x-1}y' + \frac{x-2}{x}y = 0$$

$$(5) (x^2+9)y'' + \frac{x-2}{x+7}y' + \frac{x^2+3}{2}y = 0$$

$$(6) e^x y'' + \frac{3x-4}{x+4}y' + \frac{x}{x-4}y = 0$$

ءءء النقاء المنفرءة النظاملة وءلر النظاملة لكل من المعاءلات الآآلة :

$$(7) x^2(x^2-1)^2 y'' + \frac{x(x+1)}{x-4}y' + \frac{3(x-1)}{x^2-16}y = 0$$

$$(8) x(x^2-3x-10)y'' + \frac{x+4}{x-2}y' + 16y = 0$$

$$(9) x \sin x y'' + \frac{3(x-1)}{x+1}y' + (\cos x)y = 0$$

$$(10) (\sin x)y'' + \frac{x \cos x}{x+1}y' - \frac{x^2}{x-2}y = 0$$

$$(11) x^2(x^2-6)y'' + \frac{x-2}{x+2}y' + 32y = 0$$

$$(12) 4x(\sin x)y'' - 3y = 0$$

4- الحل حول النقاط العادية (Solution Around Ordinary Points)

قبل أن نناقش عملية إيجاد الحل ، لا بد من أن نطمئن أولاً إلى وجوده . والنظرية التالية تؤكد لنا وجود الحل حول النقطة العادية .

نظرية 4.1 : إذا كانت $x = x_0$ هي نقطة عادية للمعادلة التفاضلية :

$$py'' + qy' + ry = 0$$

فإن المعادلة لها حل $y = y(x)$ تحليلي عند $x = x_0$. وإذا كان منشور متسلسلة

$$\frac{r(x)}{p(x)} \text{ و } \frac{q(x)}{p(x)}$$

موجوداً ومتقارباً في الفترة $|x - x_0| < s$ فإن الحل $y(x)$ له منشور متسلسلة موجود ومتقارب في نفس الفترة .

ولا نريد أن نرهقك ببرهان هذه النظرية فكل ذلك ضمن مادة متقدمة في نظرية المعادلات التفاضلية .

لما كيف نجد الحل فإليك ملخص الطريقة :

(i) نفرض أن الحل له منشور متسلسلة بالشكل $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ ، حيث a_n عوامل لا بد من تعيينها .

(ii) نعوض هذه المتسلسلة في المعادلة المعطاة لنحصل على :

$$p(x) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n (x - x_0)^{n-2} + q(x) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} + r(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = 0 \dots (1)$$

(iii) حيث أن p, q, r هي لقطرات تحليلية عند $x = x_0$ ، فإن لها منشور متسلسلة عند $x = x_0$. نكتبها ، ونقوم بضرب المتسلسلات في المعادلة (1) .

(iv) نقوم بتجميع معاملات الأسس المتشابهة لنحصل على :

$$b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \dots = 0$$

حيث b_0, b_1, b_2, \dots تحوي على المعاملات a_n .

(v) نقوم بوضع $b_n = 0$ لكل n .

المعادلة $b_n = 0$ تسمى بالعلاقات المعاودة ، ومنها نجد معاملتنا a_n .

ما بالك صامت لا تنبش بينت شفة ؟

إن كان هذا الملخص فما بال التفصيل ! ليس هذا لسان حالك ؟
لا بد من إعذتك لأرض الواقع والحقيقة . فالوضع ليس وأسهل مما تتصور . والأمثلة التالية خير دليل .

مثال (1) : استخدم المتسلسلات لحل المعادلة $y'' + y = 0$ حول النقطة $x = 0$.
الحل : النقطة $x = 0$ هي نقطة عادية للمعادلة (بل إن كل نقطة في \mathbb{R} هي نقطة عادية) . وحسب نظرية 4.1 فإنه يمكن لنا أن نكتب الحل بالشكل $y = \sum_0^{\infty} a_n x^n$.
ومنه

$$y'' = \sum_2^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \quad \text{و} \quad y' = \sum_1^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

نموض في المعادلة لنحصل على :

$$\sum_2^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_0^{\infty} a_n x^n = 0$$

وحتى نستطيع دمج المتسلسلة لا بد من توحيد شكل الأسس في المتسلسلتين . فإما أن تكون الأسس في كليهما n أو في كليهما $n-2$. والمطالب (كما هو الحال معنا أيضاً) اعتاد على التعامل مع n بدلاً من $n-2$. وعليه نقوم بالتغيير التالي في المتسلسلة $\sum_2^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$

ضع $n-2=m$. إذن $n=m+2$ وكذلك $n-1=m+1$. ونستخلص أيضاً أنه عندما يكون $n=2$ يكون $m=0$. فتصبح المتسلسلة :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)a_{m+2} x^m$$

وهذا الأمر يذكركنا بتغيير المتغيرات في التكاملات المحدودة وتغيير ما يلزم في حدود التكامل .

ولكن في المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} (m+2)(m+1)a_{m+2} x^{m+2}$ يمكن استبدال m بأي متغير آخر . وإذا يمكن إعادة n بدلاً من m . فتصبح معادلتنا :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

إذن

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n] x^n = 0$$

فتكون b_n في هذه الحالة هي $(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n$.

وتكون بذلك العلاقات المعادة :

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0$$

ومنه

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)(n+1)} a_n$$

حيث : $n = 0, 1, 2, \dots$

وكما نلاحظ نستطيع أن نحصل على :

$$n=0 : a_2 = -\frac{1}{2} a_0$$

$$n=1 : a_3 = -\frac{1}{6} a_1$$

$$n=2 : a_4 = -\frac{a_2}{4 \cdot 3} = \frac{a_0}{4!}$$

$$n=3 : a_5 = -\frac{a_3}{5 \cdot 4} = \frac{a_1}{5!}$$

وهكذا لكل n . وهنا يأتي دور معلوماتك من الحسبان وسرعة بندهك لتري أن :

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{(2n)!} , \quad a_{2n+1} = (-1)^n \frac{a_1}{(2n+1)!}$$

لكل : $n = 1, 2, 3, \dots$

وعليه

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= (a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots) + (a_1 x + a_3 x^3 + \dots) \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a_0 x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a_1 x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= a_0 \cos x + a_1 \sin x$$

ألا ترى أن هذا هو الحل العام .

والآن نُسَرِّدُ إليك بشيءٍ فلا تغضب :

" لقد كان المثال من أبسط الأمثلة في هذا الموضوع " .

والآن إلى مثال أصعب .

مثال (2) : جد الحل العام للمعادلة $y'' + xy' + y = 0$.

الحل : طبعاً يمكن حل هذه المعادلة بأكثر من طريق .

ولكن الذي يهمنا هو طريق المتسلسلات . ونظرية 4.1 تضمن لنا وجود حل تحليلي على R .

إنّ يمكن فرض أن $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. ومنه :

$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ و $y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$. وبالتعويض في المعادلة

نحصل على :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

نقوم الآن بعملية توحيد الأسس فنجعلها كلها بدلالة n . وبالتالي نحالج فقط

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$. والطريق كما تعرف : نضع $m = n - 2$. ومنه $n = m + 2$.

وأيضاً نرى أن $m = 0$ إذا كان $n = 2$. كلّ هذا يسطينا

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} x^m$$

مرة أخرى فإن m هو متغير شكلي . وبالتالي

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} x^m = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

وبالتالي تصبح المعادلة لدينا :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

وحتى نستطيع أن نضع المتسلسلات في متسلسلة واحدة لا بد أن تكون بداية المتسلسلات واحدة ، وهي ليست كذلك في حالتنا . ولعمل ذلك نعرف على المتسلسلة ذات البداية المتأخرة ونوجد كل شيء معها . وفي حالتنا المتسلسلة ذات البداية المتأخرة هي $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$. وآنالك نفهم بفصل الحدود الزائدة في المتسلسلات الأخرى كما يلي :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n = 2 \cdot 1 \cdot a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

وعليه تصبح المعادلة :

$$2a_2 + a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n] x^n = 0$$

وهذا يعطينا :

$$2a_2 + a_0 = 0 \dots\dots(1)$$

وكذلك لكل $n \geq 1$:

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+1) a_n = 0 \dots\dots(2)$$

وعليه :

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2} , \quad n \geq 1$$

ومن هذه نستنتج :

$$a_3 = -\frac{a_1}{3} , \quad a_4 = -\frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{2 \cdot 4}$$

$$a_5 = -\frac{a_3}{5} = \frac{a_1}{3 \cdot 5} , \dots\dots$$

ونلاحظ هنا أن المعاملات a_n كلها نجدها بدلالة a_0 ، وهذه العوامل هي :

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{2 \cdot 4 \dots\dots 2n} = (-1)^n \frac{a_0}{2^n \cdot n!}$$

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{a_1}{3 \cdot 5 \dots\dots (2n+1)}$$

ومنه

$$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3 \cdot 5 \dots\dots (2n+1)}$$

حيث a_0 ، a_1 هي ثوابت اختيارية .

وهذا هو الحل العام المطلوب .

ولا نريد أن نثير فزعك ، ولكن نريد أن نستمع في رحلتنا عبر أعماق بحار المعادلات .
ولذلك نود أن ننطلق بك إلى بند جديد . قد يكون أصعب بقليل (أو بكثير) من البند الحالي .

مسائل

الوحدة السابعة

بند (4)

جد متسلسلة الحل العام للمعادلات التالية حول النقطة $x_0 = 0$.

(1) $y' - 2xy = 0$

(2) $y'' + y = 0$

(3) $y'' - xy' + 4y = 0$

(4) $y'' - xy = 0$

(5) $y'' - x^2y' - xy = 0$

(6) $(x^2 + 1)y'' - xy' + y = 0$

(7) $(x^2 + 1)y'' - 4xy' + 6y = 0$

(8) $y'' - y = 0$

(9) $y'' + x^2y' + 2xy = 0$

(10) $(x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0$

(11) $y'' - 3xy = 0$

(12) $y''' - 3xy' - y = 0$

5- معادلة الدلالة عند النقطة المتفردة النظامية .

(Indicial equation at singular regular point)

مرة أخرى نذكرك بأن $x = x_0$ تسمى نقطة متفردة نظامية للمعادلة :

$$py'' + qy' + ry = 0 \dots\dots(1)$$

إذا كان

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 \frac{r(x)}{p(x)} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \frac{q(x)}{p(x)}$$

موجودين .

وهذا يعني أنه يمكن أن نكتب المعادلة (1) بالشكل :

$$(x - x_0) y'' + (x - x_0) \hat{P}(x) y' + \hat{Q}(x) y = 0$$

حيث \hat{Q} , \hat{P} تحليليان عند $x = x_0$.

ومن أشهر الأمثلة على ذلك هي معادلة أبلر التي مرت بك في هذا الكتاب :

$$x^2 y'' + x y' + y = 0$$

والسؤال الآن : هل يوجد حل للمعادلة التفاضلية (1) حول نقطة متفردة نظامية ؟

والإجابة على هذا السؤال نحتاج التعريف التالي :

تعريف 5.1 : إذا كانت $x = x_0$ نقطة متفردة نظامية للمعادلة (1) ، فإن معادلة الدلالة

للمعادلة (1) هي المعادلة :

$$s(s-1) + p_0 s + q_0 = 0 \dots\dots(2)$$

حيث

$$q_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 \frac{r(x)}{p(x)} \quad \text{و} \quad p_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \frac{q(x)}{p(x)}$$

وحلول معادلة الدلالة تسمى دلائل النقطة x_0 .

وسوف نمد لك يد العون بمثال يوضح التعريف .

مثال (1) : جد معادلة الدلالة للمعادلة : $2xy'' + 6y' - 9xy = 0$ عند $x = 0$.

$$\frac{r(x)}{p(x)} = \frac{-9x}{2x} \quad \text{و} \quad \frac{q(x)}{p(x)} = \frac{6}{2x}$$

الحل : هنا

وعليه

$$q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{-9x}{2x} = 0 \quad \text{و} \quad p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{6}{2x} = 3$$

إن معادلة الدالة هي :

$$s(s-1) + 3s + 0 = 0$$

$$s^2 + 2s = 0 \quad \text{ومنه}$$

وعليه حلول هذه المعادلة هي $s = 0$, $s = -2$.

مثال (2) : جد معادلة الدالة للمعادلة $x^2 y'' - 2x(x+1)y' + (x-1)y = 0$ عند النقطة $x = 0$.

$$\text{الحل : مرة أخرى :} \quad \frac{q(x)}{p(x)} = \frac{-2x(x+1)}{x^2} \quad \text{و} \quad \frac{r(x)}{p(x)} = \frac{x-1}{x^2}$$

$$\text{وعليه} \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{r(x)}{p(x)} = -1 \quad \text{و} \quad p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{q(x)}{p(x)} = -2$$

إن معادلة الدالة هي $s(s-1) - 2s - 1 = 0$.

وبذلك تكون دلائل النقطة $x = 0$ هي جذور المعادلة :

$$s^2 - 3s - 1 = 0 \quad \text{أي} \quad s = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

وفكرة معادلة الدالة آتية من معادلة أويلر .

فإن كانت معادلة أويلر مثلاً هي :

$$x^2 y'' + ax y' + by = 0$$

فإننا نحلها بطريقة تحويلها إلى معادلة ذات عوامل ثابتة بالتعويض : $u = \ln x$. وتكون الحدودية المرتبطة بالمعادلة الجديدة هي :

$$s(s-1) + as + b \dots\dots (*)$$

$$\text{ولكن ألا ترى بأن} \quad a = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{q(x)}{p(x)} \quad \text{وأن} \quad b = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{r(x)}{p(x)} \quad ؟$$

وهذه الملاحظة تعزى إلى العالم فروبينس (Fröbenius) . وشكل حلول المعادلة (1) يعتمد على حلول معادلة الدالة .

وعملية حل المعادلة التفاضلية (حول نقطة متفردة نظامية) بملاحظة دلائل النقطة تسمى
طريقة فروينيس ، وهي موضوع البند للقادم .

جد معادلة الدلالة للمعادلات التالية حول $x_0 = 0$.

$$(1) \quad x^2 y'' - 2x(x+1)y' + (x-1)y = 0$$

$$(2) \quad x^2 y'' - 2xy' + y = 0$$

$$(3) \quad xy'' + (1-x)y' + 2y = 0$$

$$(4) \quad y'' + \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right)y = 0$$

$$(5) \quad x(x-2)y'' + 2(x-1)y' + 2y = 0$$

$$(6) \quad x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$$

$$(7) \quad x^2 y'' - 2xy' - 10y = 0$$

$$(8) \quad 4x(\sin x)y'' - 3y = 0$$

6- الحل عند النقطة المتفردة النظامية (طريقة فروبينيس)
(Solution a round regular singular point)

لتفرض أن :

$$py'' + qy' + ry = 0 \dots\dots (1)$$

معادلة تفاضلية حيث عوامل p, q, r تحليلية عند $x = x_0$ ، وأن $x = x_0$ هي نقطة متفردة نظامية .

في هذه الحالة لا نتوقع حلاً للمعادلة على فترة تحوي النقطة x_0 ، ولكن يمكن حل المعادلة على يمين x_0 وعلى يسار x_0 . ففي حالة كون x_0 هي للنقطة المتفردة الوحيدة للمعادلة مثلاً ، فإنه يمكن حل المعادلة على الفترتين (x_0, ∞) و $(-\infty, x_0)$ ، وهذه الحالة ظهرت معنا في معادلة أيلر $x^2 y'' + ax y' + by = 0$ حيث $x = 0$ نقطة متفردة وحيدة (ونظامية) وكان حل المعادلة صالح على الفترة $(0, \infty)$ وكذلك $(-\infty, 0)$ ، (ويمكنك العودة إلى الوحدة الخامسة - البند الخامس للتأكد من ذلك) .

والآن كيف نجد حلاً للمعادلة (1) حول $x = x_0$ ؟

نلخص لك الطريقة وهي المعروفة بطريقة فروبينيس لإيجاد حل على فترة من النوع $(x_0, 1)$ وفي هذه الحالة $x - x_0 > 0$.

ملخص طريقة فروبينيس

1. نتأكد أولاً بأن النقطة متفردة نظامية ، وفق القاعدة التي درسناها في البند الثالث من هذه الوحدة .
2. نجد معادلة الدلالة للمعادلة (1) عند $x = x_0$ ، ثم نجد أطوار هذه المعادلة ولنتكهن $s = s_1$ ، $s = s_2$ وهذه الجذور قد تكون حقيقية وقد تكون مركبة . وسوف نعالج حالة الجذور الحقيقية فقط .
3. لتفرض أن $s = s_1$ هو أكبر الجذرين . في هذه الحالة ضع
$$y = (x - x_0)^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$
4. نعوض y في المعادلة (1) فنحصل بعد تجميع عوامل الأسس الواحدة لـ $(x - x_0)$ لنحصل على معادلة من الشكل

$$b_0(x-x_0)^{n+1} + b_1(x-x_0)^{n+1} + \dots = 0$$

5. نضع : $b_2=0, b_1=0, b_0=0$.

هذه المعادلات تعطيك العلاقات المعادة للعوامل a_n . وسوف تلاحظ أن $b_0=0$ ليست سوى معادلة الدلالة للمعادلة (1) عند $x = x_0$.

6. بعد أن نجد a_n يكون الحل هو

$$y = (x-x_0)^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n .$$

والآن ما هي فترة التقارب لهذه المتسلسلة . والجواب في النظرية التالية والتي تركد وجود الحل وفترة تقارب متسلسله .

نظرية 6.1 : (نظرية فروبينيوس) .

إذا كانت $x = x_0$ نقطة متفرقة نظامية للمعادلة

$$py'' + qy' + ry = 0 \dots\dots (*)$$

وكانت معادلة الدلالة للمعادلة (*) عند $x = x_0$ لها جذران حقيقيان s_1, s_2 وكان

$s_1 > s_2$ فإن $y = (x-x_0)^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ حل للمعادلة (*) على الفترة (x_0, z)

حيث z هي المسافة بين x_0 وأقرب نقطة متفرقة للمعادلة (*) .

فإذا كانت x_0 هي النقطة المتفرقة الوحيدة للمعادلة (*) فإن $z = \infty$. أي أن متسلسلة الحل تتقارب على الفترة (x_0, ∞) .

والآن دعنا نطبق ذلك على بعض الأمثلة .

مثال (1) : نجد متسلسلة حل للمعادلة

$$x^2 y'' - x y' + (1-x)y = 0 \dots\dots (2)$$

عند $x=0$ على الفترة $(0, \infty)$.

الحل : أولاً $x=0$ هي نقطة متفرقة نظامية وذلك لأن $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{q(x)}{p(x)} = -1$

وكذلك $q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{r(x)}{p(x)} = 1$

وهذه الحسابات تعطينا أيضاً معادلة الدلالة للمعادلة (2) عند $x = 0$ ، وهذه المعادلة هي :

$$s(s-1) + p_0 s + q_0 = 0$$

أي

$$s(s-1) - s + 1 = 0$$

ومنه

$$s^2 - 2s + 1 = 0$$

أي أن $s_1 = s_2 = 1$.

ووفق ملخص طريقة فروبيليس فإن

$$y = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

نعرض في المعادلة لنحصل على

$$x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n+1) x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} a_n (n+1) x^n + (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

والوضع هنا يذكرنا بطريقة الحل حول النقطة العادية .

نفعل على توحيد المجاميع ، وذلك بتوحيد الأسس وخلع الزائد لنحصل على :

$$0 \cdot a_0 x + \sum \{ [(n+1)(n) - (n+1) + 1] a_n - a_{n-1} \} x^{n+1} = 0$$

ومنه

$$[(n+1)(n) - (n+1) + 1] a_n - a_{n-1} = 0$$

لكل $n \geq 1$. ومن هذا نحصل على :

$$n^2 a_n - a_{n-1} = 0$$

أي أن العلاقات المتوالية هي :

$$a_n = \frac{1}{n^2} a_{n-1} , \quad n \geq 1$$

وعليه :

$$a_1 = a_0$$

$$a_2 = \frac{1}{4} a_1 = \frac{1}{4} a_0$$

$$a_3 = \frac{1}{9} a_2 = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} a_0$$

$$= \frac{1}{(2 \cdot 3)^2} a_0$$

وعموماً نجد أن

$$a_n = \frac{1}{(n!)^2} a_0$$

وعليه فإن المعادلة (2) لها حل من الشكل :

$$y = a_0 x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} x^n, \quad x > 0$$

هل تريد مثالا آخر ؟

إننا إلى ذلك ناهيون .

مثال (2) : جد متسلسلة حلّ للمعادلة

$$x^2 y'' + (3x + x^2) y' + (1 + x^2) y = 0 \dots\dots (3)$$

عند النقطة $x = 0$.

الحل : النقطة هي نقطة متفردة نظامية . وبالتالي يمكننا استخدام طريقة فروبيونس لنجد حلّاً للمعادلة (3) على الفترة $(0, \infty)$.

وحتى نجد معادلة الدلالة نقوم بحساب :

$$q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \cdot \frac{1 + x^2}{x^3} = 1, \quad p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{3x + x^2}{x^2} = 3$$

ومنه فإن معادلة الدلالة هي :

$$s(s-1) + 3s + 1 = 0$$

أي :

$$s^2 + 2s + 1 = 0$$

وتكون دلائل النقطة $\lambda - 0$ (جذور معادلة الدلالة) هي $s_1 = s_2 = -1$. وعليه فإنه

يمكننا كتابة حل للمعادلة (3) على الفترة $(0, \infty)$ بالشكل :

$$y = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-1}$$

نعرض هذا في المعادلة (3) لنحصل على :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-1)(n-2)a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-1} = 0$$

نقوم بتوحيد الأسس وخلع الزائد من المجاميع لنحصل على :

$$a_1 - a_0 + \sum_{n=2}^{\infty} [n^2 a_n + (n-2)a_{n-1} + a_{n-2}] x^{n-1} = 0$$

ومنه

$$a_1 - a_0 = 0 \dots\dots(i)$$

$$n^2 a_n + (n-2)a_{n-1} + a_{n-2} = 0, \quad n \geq 2 \dots\dots(ii)$$

المعادلات (ii) هي العلاقات المعاودة للمعادلة (3) . ومن (i) و (ii) نحصل على :

$$a_1 = a_0$$

$$a_n = \frac{-(n-2)a_{n-1} - a_{n-2}}{n^2}, \quad n \geq 2$$

بالتعويض في n نحصل على :

$$a_2 = \frac{-a_0}{4}$$

$$a_3 = \frac{-a_2 - a_1}{9} = \frac{-a_0}{12}$$

$$a_4 = \frac{-2a_3 - a_2}{16} = \frac{5}{12 \cdot 16} a_0$$

وهكذا . وعليه يكون شكل الحل هو :

$$y = \frac{a_0}{x} \left[1 + x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12} - \frac{5x^4}{192} + \dots \right]$$

مثال (3) : جد متسلسلة حل للمعادلة :

$$xy'' + 4y' - xy = 0 \dots\dots(4)$$

حول $x=0$ على الفترة $(0, \infty)$.

الحل : النقطة $x=0$ هي متفردة نظامية . ولعلك بلغت من النضج كي تجد معادلة الدلالة

للمعادلة (4) . وإن صدقت في حساباتك تجد أن معادلة الدلالة هي :

$$s(s-1) + 4s = 0$$

$$. s_2 = -3, s_1 = 0 \text{ ومنه}$$

هنا جذران مختلفان والأكبر فيهما $s_1 = 0$. وعليه نأخذ $y = x^0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. وإذا قمنا

بالتعويض في المعادلة واتممت عملية توحيد الأسس وخلق الزائد في المجاميع لحصلت على :

$$4a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)(n+4)a_{n+1} - a_{n-1}] x^n = 0$$

ومنه

$$a_1 = 0 \quad (i)$$

$$a_{n+1} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+4)} , \quad n \geq 1 \dots\dots (ii)$$

ومنه

$$a_2 = \frac{a_0}{2 \cdot 5}$$

$$a_3 = \frac{a_1}{3 \cdot 6} = 0$$

$$a_4 = \frac{a_2}{4 \cdot 7} = \frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7}$$

وهكذا .

ونستطيع من هذه أن نكتب

$$a_{2n+1} = 0 , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots\dots$$

وإن

$$a_{2n} = \frac{1}{(2 \cdot 4 \dots\dots 2n)(5 \cdot 7 \dots\dots (2n+3))} a_0$$

$$= \frac{a_0}{2^n \cdot n! [5 \cdot 7 \dots\dots (2n+3)]} , \quad n \geq 1$$

ومن هذا نحصل على .

$$y = a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n (n!) [5 \cdot 7 \dots\dots (2n+3)]} \right] , \quad x > 0$$

نكتفي بهذا القدر من الأمثلة ، كي نمضي للمعالجة الكاملة لحل المعادلة (1) عند نقطة متفرقة نظامية . أي أننا نريد أن نجد للحل العام للمعادلة . وهذا هو موضوع البند القادم .

مسائل

الوحدة السادسة

بند (6)

استخدم طريقة فروبنيوس لتجد متسلسلة حل للمعادلات التالية حول $x = 0$ ، $x > 0$.

$$(1) \quad 9x^2y'' + 9x^2y' + 2y = 0$$

$$(2) \quad 2x(x-1)y'' + 3(x-1)y' - y = 0$$

$$(3) \quad x^2y'' + xy' + x^2y = 0$$

$$(4) \quad xy'' + y' - 4y = 0$$

$$(5) \quad x^2y'' + (x^2 + x)y' - y = 0$$

$$(6) \quad 3xy'' + (2-x)y' - y = 0$$

$$(7) \quad 4x^2y'' + 2x^2y' - (x+3)y = 0$$

$$(8) \quad x^2y'' + (x^2 - x)y' + y = 0$$

$$(9) \quad xy'' - y' - xy = 0$$

$$(10) \quad 3x^2y'' + 8xy' + (x-2)y = 0$$

7- الحل العام عند النقطة المتفردة النظامية
(General solution around regular point)

لتفرض أن :

$$p y'' + q y' + r y = 0 \dots\dots\dots(1)$$

معادلة من المرتبة الثانية وعواملها r, q, p تحليلية عند $x = x_0$. وكانت نقطة متفردة نظامية فإن نظرية 6.1 من البند السابق تضمن لنا وجود حل من الشكل :

$$y = (x - x_0)^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

حيث s_1 هو أكبر جذور معادلة الدلالة للمعادلة (1) عند النقطة x_0 .

وكمعادلة خطية من المرتبة الثانية فإننا نتوقع وجود حلين مستقلين للمعادلة (1) ويكون الحل العام هو المصح الخطي لهذين الحلين . والبند السادس عرض لنا طريق إيجاد أحد هذين الحلين . والآن كيف نجد حلاً آخر للمعادلة (1) .

طبعاً حسب نظرية 5.2 من الوحدة الثالثة هناك قانون لإيجاد y_2 إذا عرفنا y_1 . هل تذكر ذلك ؟ هل تذكر القانون

$$y_2 = y_1 \int \frac{W(x)}{y_1^2(x)} dx$$

هذا القانون صعب التطبيق في حالتنا حيث y_1 هي متسلسلة وعليه لا بد من تربيعها وإيجاد

$$\text{المعكوس لذلك} \left(\frac{1}{y_1^2} \right) .$$

وهذا ليس بالأمر السهل . إذن لا بد من البحث عن طريق آخر .

ولكن ماذا لو وضعنا الحل الثاني بالشكل :

$$y = (x - x_0)^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

حيث s_2 هو الجذر الثاني لمعادلة الدلالة ؟ ترى هل

نحصل على حل مستقل عن الحل $y = (x - x_0)^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ ؟ $(s_1 > s_2)$ ؟

ليس الأمر بصحيح لو كان $s_1 = s_2$ أو كان $s_1 - s_2$ عدد صحيح . إذن ما الحل ؟
الجواب في النظرية التالية :

طريقة 7.1 : نفترض أن نقطة متفردة نظامية للمعادلة (1) وأن s_1, s_2 هما

جزءا معادلة للدالة للمعادلة (1) عند x_0 ، حيث $s_1 \geq s_2$.

(i) إذا كان $s_1 - s_2$ فإن المعادلة (1) لها حلان مستقلان من

الشكل :

$$y_2 = (x - x_0)^n \sum_{a=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n , \quad y_1 = (x - x_0)^n \sum_{a=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

حيث $a_0 \neq 0$ ، $b_0 \neq 0$ ، $x \in (x_0, z)$.

(ii) إذا كان $s_1 = s_2$ فإن المعادلة (1) لها حلان مستقلان من

الشكل :

$$y_1 = (x - x_0)^n \sum_{a=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$y_2 = y_1 \ln(x - x_0) + (x - x_0)^n \sum_{a=1}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

حيث $a_0 \neq 0$ ، $x \in (x_0, z)$.

(iii) إذا كان $s_1 - s_2$ عدد صحيح أكبر من الصفر فإن هناك حلان مستقلان

للمعادلة (1) من الشكل :

$$y_1 = (x - x_0)^n \sum_{a=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$y_2 = cy_1 \ln(x - x_0) + (x - x_0)^n \sum_{a=1}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

حيث $a_0 \neq 0$ ، $b_0 \neq 0$ ، $x \in (x_0, z)$ و c ثابت يمكن أن يساوي الصفر .

ونلاحظ هنا أن طريقة فروينيس (البند السادس) دائماً تعطينا y_1 . وكذلك فإنها تعطينا y_2

إذا كان $s_1 - s_2$ ليس عدداً صحيحاً . أما كيف نجد العوامل b_n في الحالة (ii) والحالة (iii)

فإننا نستخدم طريقة العوامل غير المعينة . ولا نقول بأن هذه سهلة لكنها تلي بالفرض .

ولنأخذ أمثلة على ذلك .

مثال (1) : جد مجموعة من حدود متسلسلة كل من الحليين المستقلين للمعادلة

$$x > 0 \quad x_0 = 0 \quad \text{حول} \quad x y'' - x y' + (1-x)y = 0 \quad \text{في الفترة}$$

الحل : هذه المعادلة هي نفس معادلة مثال (1) من البند السادس . وهناك أوجدنا :

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} x^{n+1} \quad , \quad \text{وكذلك جذور معادلة الدالة كفت} \quad s_1 = s_2 = 1 \quad , \quad \text{وهذه حالة (ii) من}$$

$$\text{نظرية 7.1 . وعليه يكون شكل } y_2 \text{ هو : } y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \quad \text{والمطلوب الآن هو}$$

إيجاد العوامل b_n .

نحسب y_2' , y_2'' لنجد :

$$y_2' = y_1' \ln x + \frac{y_1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) b_n x^n$$

$$y_2'' = y_1'' \ln x - \frac{y_1}{x^2} + \frac{2y_1'}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) b_n x^{n-1}$$

نعوض الآن في المعادلة لنحصل على :

$$\begin{aligned} & [x^2 y_1'' - x y_1' + (1-x)y_1] \ln x - 2y_1 + 2x y_1' \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) b_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) b_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+2} = 0 \end{aligned}$$

وحيث أن y_1 هو حل للمعادلة فإن معامل $\ln x$ يساوي صفراً . ومنه نحصل على :

$$2x y_1' - 2y_1 + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) b_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) b_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+2} = 0$$

وحيث أن $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} x^{n+1}$ وبالتعويض وتجميع الحدود في المعادلة (*) نحصل :

$$(2+b_1)x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{2n}{(n!)^2} + n^2 b_n - b_{n-1} \right] x^{n+1} = 0$$

ومنه

$$2+b_1=0 \quad (i)$$

$$2 \leq n , \quad \frac{2n}{(n!)^2} + n^2 b_n - b_{n-1} = 0 \quad (ii)$$

ومنه $b_1 = -2$, وكذلك

$$b_n = \frac{1}{n^2} \left[b_{n-1} - \frac{2n}{(n!)^2} \right] , \quad n \geq 2$$

وبالتعويض لقيم n نحصل على :

$$b_3 = \frac{-11}{108}, \quad b_2 = \frac{-3}{4} \quad \text{وعليه :}$$

$$y_2 = y_1 \ln x - 2x^2 - \frac{3}{4}x^3 - \frac{11}{108}x^4 + \dots$$

مثال (2) : جد بعض الحدود الأولى لمتسلسلة الحلين المستقلين للمعادلة :

$$xy'' + 4y' - xy = 0 \quad \text{عند } x = 0 \text{ لقيم } x > 0.$$

الحل : معادلتنا هي معادلة مثال (3) من البند السادس . وهناك أوجدنا معادلة الدلالة عند

النقطة المتفردة للنظامية $x = 0$ ووجدنا أن جذور معادلة الدلالة هما $s_1 = 0, s_2 = -3$.

وباستخدام الجذر الأكبر $s_1 = 0$ وطريقة فروينيس وجدنا أن

$$x > 0, \quad y_1 = a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n! [5 \cdot 7 \cdots (2n+3)]} \right]$$

وإذا أخذنا $a_0 = 1$ نجد أن

$$y_1 = 1 + \frac{x^2}{10} + \frac{1}{280}x^4 + \dots$$

وحيث أن $s_1 - s_2$ عدد صحيح موجب فإنه وفق نظرية 7.1 الحالة (iii) يكون الحل الثاني

لمعادلتنا بالشكل :

$$y_2 = cy_1 \ln x + x^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

فإذا عوضنا y_2 في المعادلة نحصل على :

$$\begin{aligned} & [xy'' + 4y' - xy]c \ln x + 3c \frac{y_1}{x} + 2cy_1' \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} (n-3)(n-4)b_n x^{n-4} + \sum_{n=0}^{\infty} 4(n-3)b_n x^{n-4} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-2} = 0 \end{aligned}$$

وحيث أن y_1 حل للمعادلة فإن معامل $\ln x$ يساوي صفراً .

ولذلك بعد توحيد المجاميع والتبسيط نحصل على :

$$3c \frac{y_1}{x} + 2cy_1' - 2b_1 \frac{1}{x^3} + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-3)b_n - b_{n-2}]x^{n-4} = 0$$

وبالتعويض عن y_1, y_1' ونشرنا المتسلسلة نحصل على :

$$-\frac{2b_1}{x^3} + (-2b_2 - b_0)\frac{1}{x^2} + (3c - b_1)\frac{1}{x} + (4b_4 - b_2) \\ + \left(\frac{7}{10}c + 10b_5 - b_3\right)x + (18b_4 - b_4)x^2 + \dots = 0$$

ومن ذلك نحصل على العلاقات

$$-2b_1 = 0, \quad -2b_2 - b_0 = 0, \quad 3c - b_1 = 0,$$

$$4b_4 - b_2 = 0, \quad \frac{7}{10}c + 10b_5 - b_3 = 0,$$

$$18b_6 - b_4 = 0$$

وهذا يعطينا

$$b_1 = 0, \quad b_2 = -\frac{1}{2}b_0$$

$$c = \frac{1}{3}b_1 = 0, \quad b_4 = -\frac{1}{8}b_0$$

$$b_5 = \frac{1}{10}b_3, \quad b_6 = -\frac{1}{144}b_0$$

وعليه

$$y_2 = b_0 \left[\frac{1}{x^3} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x} - \frac{1}{144}x^3 + \dots \right] \\ + b_3 \left[1 + \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{280}x^4 + \dots \right]$$

وحتى يكون y_2 مستقلاً عن y_1 لا بد أن نختار b_0 بحيث لا يساوي صفراً إذ أن معامل b_3 ليس سوى y_1 . وحيث أن b_0, b_3 ثوابت عشوائية نختار $b_0 = 1, b_3 = 0$ وعليه يكون :

$$y_2 = b_0 \left[\frac{1}{x^3} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x} - \frac{1}{144}x^3 + \dots \right]$$

نكتفي بهذا القدر من الأمثلة .

مسائل

الوحدة المراجعة

بند (7)

جد متسلسلة الحل العام للمعادلات التالية حول $x = 0$:

$$(1) \quad x(x-4)y'' + (x-2)y' - 4y = 0$$

$$(2) \quad 2x^2 y'' + 5xy' - 2y = 0$$

$$(3) \quad 8x(x+4)y'' - 8y' + y = 0$$

$$(4) \quad 2xy'' + 3y' - \frac{1}{x-1}y = 0$$

$$(5) \quad 3x^2 y'' - \frac{2x}{x-1}y' + \frac{2}{x-1}y = 0$$

$$(6) \quad 3x^2 y'' + xy' - (1+x)y = 0$$

$$(7) \quad x^2 y'' + x(x-1)y' + (1-x)y = 0$$

$$(8) \quad xy'' + (1-x)y' - y = 0$$

$$(9) \quad x^2 y'' + 3xy' + (x+1)y = 0$$

$$(10) \quad x^2 y'' + 2x^2 y' - 2y = 0$$

$$(11) \quad xy'' - (x+3)y' + 2y = 0$$

$$(12) \quad xy'' + (2x+3)y' + 4y = 0$$

8- معادلات متمييزة (Special equations)

سوف نعرض في هذا البند عدداً من المعادلات المتمييزة ، ونذكر حلها ولكن دون تفصيل ، إذ سنترك لك التأكد مما سنعرضه .

1- معادلة ليجاندر (Legendre's equation)

معادلة ليجاندر من المرتبة k هي المعادلة :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + k(k+1)y = 0 \dots\dots(1)$$

هذه المعادلة لها نقطتان منفردتان نظاميتان هما $\{-1, 1\}$.

أما ما عدا ذلك فهي نقاط عادية . فالنقطة $x=0$ نقطة عادية . وأشهر الحلول هو الحل عند

النقطة $x=0$ والنقطة $x=1$.

الحل عند النقطة $x=0$

نضع $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ثم نموض ذلك في المعادلة (1) . وبعد التعميض ، وتوحيد الأسس

وخلع الزائد ودمج المجاميع نحصل على :

$$2a_2 + k(k+1)a_0 + [6a_3 + (k+2)(k-1)a_1]x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + (k(k+1) - n(n+1))a_n] x^n = 0 .$$

ومن هذا نحصل على

$$2a_2 + k(k+1)a_0 = 0$$

$$6a_3 + (k+2)(k-1)a_1 = 0$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + ((k+n)(k-n))a_n = 0 , n \geq 2 .$$

ذلك نحصلنا :

$$y = a_0 \left[1 - \frac{(k+1)k}{2!} x^2 + \frac{(k+3)(k+1)k(k-2)}{4!} x^4 + \dots \right] + a_1 \left[x - \frac{(k+2)(k-1)}{3!} x^3 + \frac{(k+4)(k+2)(k-1)(k-3)}{5!} x^5 - \dots \right]$$

$$= a_0 y_1 + a_1 y_2 .$$

•

وهذه المتسلسلة تمثل لنا الحل على الفترة $(-1, 1)$ حيث أن $x = \pm 1$ هي نقاط منفردة .

والآن ماذا لو كان k عدداً طبيعياً ؟

لو كان الأمر كذلك لوجدنا أنه : إما y_1 يكون حدودية أو y_2 يكون حدودية .

وهذا يقودنا إلى التعريف التالي :

تعريف 8.1 : (حدوديات لجاندر)

حدودية لجاندر من الدرجة k هي الحدودية :

$$P_k(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

وهذه الحدوديات مهمة جداً في الفيزياء والرياضيات التطبيقية . ولها خصائص جداً جميلة
نوجز منها :

(1) لكل k عدد طبيعي ، حل لمعادلة لجاندر من الرتبة k .

(2) حدوديات لجاندر تحقق خاصية التعامد :

$$\int_{-1}^1 P_k(x) P_s(x) dx = 0$$

لكل $k \neq s$.

(3) حدوديات لجاندر P_k لها k من الأصفار المختلفة على الفترة $(-1, 1)$.

ويمكن حل معادلة لجاندر حول النقطة $x = 1$ لنحصل على واقع مشابه للواقع الناتج

عن الحل عند $x = 0$.

ونترك الآن لجاندر ومعادلاته لتتعرف على معادلة أخرى .

II. معادلة بيسل (Bessel's equation)

معادلة بيسل من الرتبة k ($k \geq 0$) هي للمعادلة :

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - k^2) y = 0 \dots\dots\dots (2)$$

وهذه المعادلة لها نقطة متفردة نظامية عند $x = 0$ وهي النقطة المنفردة الوحيدة . وبناء

على نظرية 6.1 ، فإن متسلسلة حل المعادلة (2) تتقارب على الفترة $(0, \infty)$.

ومعادلة للدالة للمعادلة (2) هي :

$$s(s-1) + s - k^2 = (s-k)(s+k) = 0$$

وجذور هذه المعادلة $s_2 = -k$, $s_1 = k$

فإذا كان $k \geq 0$ ، فإن المعادلة (2) لها حل من الشكل $y = x^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_0 \neq 0$

وذلك وفق نظرية 6.1 . ولو عوضنا ذلك في معادلة بيسل (معادلة (2)) لحصلنا على :

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+k)(n+k-1) + (n+k) - k^2] a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 0$$

نوجد المجاميع الآن لنحصل على :

$$(2n+1)a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} n[(2k+n)a_n + a_{n-2}] x^n = 0$$

ومنه

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = a_{2n+1} = 0 , \quad n \geq 0$$

وكذلك

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{2^{2n} \cdot n! (k+1)(k+2) \dots (k+n)}$$

وعليه يكون

$$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0 x^{2n+k}}{2^{2n} \cdot n! (k+1)(k+2) \dots (k+n)} \dots (*)$$

هو أحد حلَي معادلة بيسل .

وإذا كان k عدد صحيح موجب ، ولخترنا $a_0 = \frac{1}{2^k k!}$ فإن الحل (*) يأخذ الشكل :

$$J_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}$$

وهذا هو لقران بيسل من النوع الأول .

أما إذا لم يكن k عدداً صحيحاً فإن لقران بيسل يأخذ الشكل :

$$J_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}$$

حيث $\Gamma(k)$ هو اقتران جاما والمعروف بالشكل :

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} t^{k-1} e^{-t} dt \quad (k > 0)$$

و كذلك قمنا باختيار

$$a_0 = \frac{1}{2^k \Gamma(k+1)}$$

طبعاً هناك اقتران بيسيل من النوع الثاني . وكلا الاقتران قد عولجا بالتفصيل في الكتب التي نتحدث عن الاقترانات المتميزة (الخاصة) (Special function) . والذي يود المزيد حول ذلك فإنا نحيله إلى كتاب :

ونود أن نذكر أن هناك مجموعة من المعادلات المشهورة من بينها :

1- معادلة هيرميت من المرتبة k : (Hermit Equation)

$$y'' - 2xy' + 2ky = 0$$

وإذا كان k عدداً طبيعياً فإن أحد حلول المعادلة حول النقطة $x = 0$ هو حدودية .

2- معادلة تشيبشيف من الرتبة k : (Chebyshev Equation)

$$(1-x^2)y'' - xy' + k^2y = 0$$

كذلك لهذه المعادلة حل حدودي حول $x = 0$ إذا كان k عدداً طبيعياً .

3- معادلة لاجير من الرتبة k : (Laguerre's Equation)

$$xy'' + (1-x)y' + ky = 0$$

ومرة أخرى إذا كان k عدداً طبيعياً فإن المعادلة لها حل حدودي .

ويمكنك أن تفسر غور هذه المعادلات كما فعلنا مع أي معادلة عند نقطة عادية أو متفردة نظامية .

ونكتفي بهذا القدر عن المعادلات وحل المتسلسلة كي نذهب لوحدة جديدة وموضوع جديد .

الوحدة الثامنة

منظومة معادلات تفاضلية خطية

' Systems of Linear Differential Equations '

في هذه الوحدة سوف نتعالج مسألة حل منظومة معادلات وليس معادلة واحدة فقط . وهذا الموضوع له تطبيقاته وأهميته في الهندسة الكهربائية . وسوف ندرس فقط المنظومات من المرتبة الأولى .

لتصبح المنظومة (1) بالشكل :

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

فإذا استخدمنا الرمز Y' ليدل على :

$$Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

فإن المنظومة (1) تصبح :

$$Y' = AY + F \dots\dots (2)$$

وهو الشكل الذي يرغب أحدها في رؤيته واستخدامه .

والآن :

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{تحويل 1,2 : تسمى المنظومة } Y' = AY + F \text{ منظومة متجانسة إذا كان}$$

وإلا فالمنظومة غير متجانسة .

وعليه فالمنظومة :

$$y'_1 = 2x y_1 - y_2$$

$$y'_2 = y_1 + y_2 + 1$$

هي منظومة غير متجانسة .

ولكن

$$y'_1 = y_1 - y_2 , \quad y'_2 = y_1 + y_2$$

هي منظومة متجانسة (وايضاً ذات عوامل ثابتة) .

مسائل

الوحدة الثامنة

بند (1)

اكتب المنظومات التالية بطريقة المصفوفات :

$$(1) \quad \begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - y_2 + x^2 \\ y_2' &= -y_1 + 2y_2 + e^x \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + \sin x \\ y_2' &= y_1 - y_2 + 1 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} y_1' &= t^2 y_1 - y_2 - y_3 + x \\ y_2' &= e^x y_3 + 5 \\ y_3' &= t y_1 - y_2 + 3y_3 - e^x \end{aligned}$$

اكتب المنظومات التالية بشكل معادلات خالية من المصفوفات :

$$(1) \quad Y' = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} Y + e^{2x} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad Y' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} Y + e^x \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} Y + e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2- الأهمية ووجود الحل لمنظومات الرتبة الأولى

(Existence of solution)

تكمن أهمية منظومات المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى في أنه يمكن تحويل أي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة n إلى منظومة معادلات خطية من الرتبة الأولى .
والنظرية التالية تبين ذلك .

نظرية 2.1: إن أي معادلة خطية من الرتبة n من الشكل:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f \quad (1)$$

يمكن تحويلها إلى منظومة معادلات خطية

$$Y' = AY + F$$

حيث A مصفوفة من الرتبة n .

البرهان : نعرف الإحداثيات التالية على النحو الآتي :

$$y_1 = y$$

$$y_2 = y'$$

⋮

$$y_n = y^{(n-1)}$$

وعليه يمكن كتابة المعادلة (1) بالشكل :

$$y_1' = y_2 = 0 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 + \dots + 0 \cdot y_n + 0$$

$$y_2' = y_3 = 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 + \dots + 0 \cdot y_n + 0$$

⋮

$$y_{n-1}' = y_n = 0 \cdot y_1 + \dots + 0 \cdot y_{n-1} + 1 \cdot y_n + 0$$

$$y_n' = -a_0y_1 - a_1y_2 - \dots - a_{n-1}y_n + f$$

وعليه تأخذ هذه المنظومة الشكل :

$$Y' = AY + F \quad (2)$$

حيث

$$Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} & f \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}$$

ولو أنعمت (وليس أمعت) النظر لرأيت أن المعادلة (1) والمنظومة (2) لها نفس الحل أي نفس قيمة y .

والآن متى يكون للمنظومة $Y' = AY + B$ حل ؟
والجواب :

نظرية 2.2 ، إذا كانت $Y' = AY + F$ منظومة معادلات خطية وكانت مداخل عناصر) المصفوفة A متصلة على فترة ما : $I = [a, b]$ ، فإن هناك حلاً وحيداً للمنظومة على الفترة I ويحقق الشرط الأولي $Y(t_0) = F(t_0)$ حيث :

$$Y(t_0) = \begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ \vdots \\ y_n(t_0) \end{pmatrix}, \quad F(t_0) = \begin{pmatrix} f_1(t_0) \\ \vdots \\ f_n(t_0) \end{pmatrix}$$

وهذه النظرية مستمدة من نظريات الوجود والوحدانية المتعلقة بالمعادلة التفاضلية الخطية من المراتبة n .

ويجدر الإشارة أن مجموعة حلول المنظومة $Y' = AY + F$ لا تشكل متجهاً فضائياً إلا إذا كان F هو المتجه الصفري . أي أن $f_i(t) = 0$ لكل t في I ولكل i حيث $1 \leq i \leq n$.

ونظرية 2.1 تشير من طرف خفي أن هناك تشابهاً بين فضاء حلول المعادلة الخطية من المرتبة n وفضاء الحلول للمنظومة الخطية $Y' = AY$ حيث A من المرتبة n .
وماك شاهداً على ذلك

نظرية 2.3 : إذا كان W هو فضاء الحلول للمنظومة $Y' = AY$ حيث A من المرتبة n ، فإن بُعد W هو n .

وبرهان هذه النظرية هو نتيجة سهلة من النظرية التالية :

نظرية 2.4 : إذا كان Y_1, \dots, Y_k هي حلول للمنظومة $Y' = AY$ وكانت $t_0 \in I$ ، فإن الحلول Y_1, \dots, Y_k معتمدة خطياً إذا وإذا فقط $Y_1(t_0), \dots, Y_k(t_0)$ معتمدة خطياً في R^n حيث n هي مرتبة المصفوفة A .

البرهان : لنفرض أن Y_1, \dots, Y_k معتمدة خطياً .
إن هناك ثوابت c_1, \dots, c_k ليس جميعها أصفاً بحيث
$$c_1 Y_1 + \dots + c_k Y_k = 0$$

وهذا يعني أن:

$$c_1 Y_1(t) + \dots + c_k Y_k(t) = 0$$

لكل $t \in I$. إذن
$$c_1 Y_1(t_0) + \dots + c_k Y_k(t_0) = 0$$

ومنه $Y_1(t_0), \dots, Y_k(t_0)$ معتمدة خطياً في R^n .

والآن : لنفرض أن $Y_1(t_0), \dots, Y_k(t_0)$ معتمدة خطياً .

إن هناك ثوابت (ليس جميعها صفراً) c_1, \dots, c_k بحيث :
$$c_1 Y_1(t_0) + \dots + c_k Y_k(t_0) = 0 \quad (*)$$

ولكن من الفرض Y_1, \dots, Y_k هي حلول للمنظومة $Y' = AY$. وعليه

$$Y = c_1 Y_1 + \dots + c_k Y_k$$

هو حل أيضاً للمنظومة $Y' = AY$ مع الشرط الأولي $Y(t_0) = 0$ ، وذلك لأن

$$Y(t_0) = c_1 Y_1(t_0) + \dots + c_k Y_k(t_0) = 0$$

من المعادلة (*) .

وحيث أن $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ هو أيضاً حل للمنظومة بنفس الشرط الأولي ، فإن نظرية

الوحداية : نظرية 2.2 ، تقول بأن $Y = Z$ أي أن :

$$Y = c_1 Y_1 + \dots + c_k Y_k = 0$$

وهذا يعني أن Y_1, \dots, Y_k معتمدة خطياً .
ولذلك مقتنع بأن هذا ينهي البرهان .

والآن إلى مثال ولحد على هذا البند .

مثال (1) : حول المعادلة التالية إلى منظومة من المرتبة الأولى :

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{4}{x^2}\right) y = 0$$

الحل : كما ورد في برهان نظرية 2.1 ، نضع :

$$y_1 = y$$

$$y_2 = y'$$

ومنه

$$y_1' = y' = y_2 = 0 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2,$$

$$\begin{aligned} y_2' = y'' &= -\frac{1}{x} y' - \left(1 - \frac{4}{x^2}\right) y \\ &= -\frac{1}{x} y_2 - \left(1 - \frac{4}{x^2}\right) y_1 \end{aligned}$$

ومنه

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(1 - \frac{4}{x^2}\right) & -\frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

وتكون المنظومة $Y' = AY$

حول المعادلات التالية إلى منظومة معادلات من الرتبة الأولى :

$$(1) \quad y'' + \frac{1}{x}y' + \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)y = 0$$

$$(2) \quad y''' + (\cos x)y'' + e^x y = x^2 + 1$$

$$(3) \quad y^{(4)} + e^x y'' = \cos x$$

$$(4) \quad y'' + y = x^2$$

$$(5) \quad y'' - 3y' - 10y = \sin x$$

$$(6) \quad y''' - y' + y = \cos x$$

$$(7) \quad y^{(4)} + y = x^2$$

3- حل منظومات المراتبة الأولى ذات العوامل الثابتة (Solution of first order systems with constant coefficients)

في هذا البند والبنود التي تليه سوف نعالج مسألة حل المنظومة $Y' = AY + F$ حيث مدخولات المصفوفة A ثوابت .

وهناك عدة طرق لحل المنظومات الخطية . ولكننا سوف نعرض طريقتين هما :

(1) طريقة تحويل لابلاس .

(2) طريقة القيم الذاتية للمصفوفة A .

وفي هذا البند سوف ننقلش الطريقة الأولى . وهذه الطريقة يسهل التعامل بها في حالة كون مرتبة A منخفضة كأن تكون 2 أو 3 . والآن إلى نقاش تلك الطريقة .

طريقة تحويل لابلاس

لتفرض أن المنظومة هي $Y' = AY + F$ مع الشرط الأولي

$$Y'(0) = B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

وملخص الطريق :

(1) نكتب المنظومة بالشكل للمادي وليس بشكل المصفوفات

$$y'_1 = a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n + f_1$$

\vdots

$$y'_n = a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n + f_n$$

(2) نأخذ تحويل لابلاس لطرفي كل معادلة من هذه المعادلات فنحصل على :

$$s \hat{y}_1(s) - y_1(0) = a_{11}\hat{y}_1(s) + \dots + a_{1n}\hat{y}_n(s) + \hat{f}_1$$

\vdots

$$s \hat{y}_n(s) - y_n(0) = a_{n1}\hat{y}_1(s) + \dots + a_{nn}\hat{y}_n(s) + \hat{f}_n$$

(3) نستخدم الشرط الأولي فنجد منه $y_1(0) = b_1, \dots, y_n(0) = b_n$.

(4) يتكون لدينا في النهاية منظومة معادلات (ليس تفاضلية) خطية : n من المعادلات في n من المجاهيل $(\hat{y}_1(s))$.

(5) نحل هذه المعادلات بالطرق العادية ونجد قيم $\hat{y}_1(s), \dots, \hat{y}_n(s)$ بدلالة s .

(6) نأخذ نظير لابلاس لهذه الاقترانات لنجد من ذلك y_1, \dots, y_n .

ولنأخذ أمثلة على ذلك .

مثال (I) : حل المنظومة $Y' = AY$, $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ حيث $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

الحل : المنظومة هي :

$$y_1' = 3y_1 - 2y_2 ,$$

$$y_2' = 3y_2 - 2y_1 ,$$

$$\text{مع الشروط : } y_2(0) = 1 , y_1(0) = 1$$

نؤثر بتحويل لابلاس على طرفي المعادلات لنحصل على :

$$s \hat{y}_1'(s) - y_1(0) = 3 \hat{y}_1(s) - 2 \hat{y}_2(s)$$

$$s \hat{y}_2'(s) - y_2(0) = 3 \hat{y}_2(s) - 2 \hat{y}_1(s)$$

نستخدم الشروط الأولية وننقل كل شيء لطرف واحد فنحصل على :

$$(s+3) \hat{y}_1'(s) + 2 \hat{y}_2(0) = 1$$

$$2 \hat{y}_2'(s) + (s-3) \hat{y}_2(0) = 1$$

وهاتان معادلتان بمتجهولين \hat{y}_1, \hat{y}_2 . نحلها بالطرق الاعادية لنحصل على :

$$\hat{y}_1 = \frac{1}{s-1} , \hat{y}_2 = \frac{1}{s-1}$$

نأخذ نظير لابلاس لنصل في النهاية إلى :

$$y_1 = e^x , y_2 = e^x$$

$$Y = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix} \text{ ويكون}$$

مثال (2) : حل المنظومة

$$2y_2 + 4t - y_1' = 0$$

$$y_2' + 2y_2 - 4y_1 + 4t + 2 = 0$$

$$y_2(0) = 5, y_1(0) = 4 \quad \text{مع الشروط}$$

الحل : هذه منظومة خطية من المرتبة الأولى ، ذات عوامل ثابتة . نؤثر بتحويل لابلاس

على طرفي المعادلتين لتحصل على :

$$s\hat{y}_1 - 2\hat{y}_2 = 4 + \frac{4}{s^2}$$

$$-4\hat{y}_1 + (s+2)\hat{y}_2 = -5 - \frac{2}{s} - \frac{4}{s^2}$$

ماتن معادلتان في \hat{y}_1 و \hat{y}_2 . نحلها لتحصل على :

$$\hat{y}_1 = \frac{4s-2}{(s+4)(s-2)} \quad , \quad \hat{y}_2 = \frac{-6}{s+4} + \frac{1}{s-2} - \frac{2}{s^2}$$

وعليه :

$$\hat{y}_1 = \frac{3}{s+4} + \frac{1}{s-2}$$

ومنه :

$$y_1 = 3e^{-4t} + e^{2t}$$

$$y_2 = -6e^{-4t} + e^{2t} + 2x$$

وكذلك

ويكون

$$Y = \begin{pmatrix} 3e^{-4t} + e^{2t} \\ -6e^{-4t} + e^{2t} + 2x \end{pmatrix}$$

مسائل

الوحدة الثامنة

بند (3)

استخدم موثر لابلاس لتجد حل المنظومات التالية :

$$(1) \quad y_1' = y_1 + 2y_2$$

$$y_2' = 2y_1 + y_2 \quad , \quad y_1(0) = 5 \quad , \quad y_2(0) = -5$$

$$(2) \quad y_1' = y_1 + 2y_2 + e^x$$

$$y_2' = 2y_1 + y_2 \quad , \quad y_1(0) = y_2(0) = 0$$

$$(3) \quad y_1' = y_1 + 2y_2 + u_1(x)$$

$$y_2' = 2y_1 + y_2 \quad , \quad y_1(0) = 5 \quad , \quad y_2(0) = -5$$

$$(4) \quad y_1' = y_1 - 2y_2$$

$$y_2' = 2y_1 + y_2 \quad , \quad y_1(0) = 5 \quad , \quad y_2(0) = -5$$

$$(5) \quad y_1'' = -3y_1 - 4y_2$$

$$y_2' = 2y_1 + 3y_2 \quad , \quad y_1(0) = 0 \quad , \quad y_1'(0) = 1 \quad , \quad y_2(0) = 0$$

$$(6) \quad y_1'' = 5y_1 - 3y_2$$

$$y_2'' = 3y_1 - 5y_2 \quad , \quad y_1(0) = 8 \quad , \quad y_1'(0) = 16 \quad , \quad y_2(0) = y_2'(0) = 0$$

4- حل المنظومات والقيم الذاتية الحقيقية المختلفة

(Distinct real eigen values case)

سوف نعالج في هذا البند وما يليه حل المنظومات من الشكل $Y' = AY$ وذلك

بطريق القيم الذاتية . والقيم الذاتية التي نعينها هي القيم الذاتية للمصفوفة A .
وهناك ثلاث حالات لهذه القيم :

(1) قيم ذاتية حقيقية مختلفة .

(2) قيم ذاتية مركبة مختلفة .

(3) قيم ذاتية مكررة حقيقية كانت أم مركبة .

وفي هذا البند سوف نتناول الحالة الأولى .

وسوف نبدأ دراستنا بالنظرية التالية :

نظرية 4.1 : لنفرض أن $Y' = AY$ منظومة خطية وأن مرتبة A هي n . إذا كانت λ قيمة ذاتية حقيقية للمصفوفة A وكان E متجهاً ذاتياً بحيث $AE_\lambda = \lambda E_\lambda$ فإن $Y_\lambda = e^{\lambda t} E_\lambda$ حل للمنظومة . وفوق ذلك إذا كان λ_1, λ_2 قيمتان ذاتيتان مختلفتان والقيم الذاتية المقابلة هي E_1, E_2 فإن $Y_1 = e^{\lambda_1 t} E_1, Y_2 = e^{\lambda_2 t} E_2$ حلان مستقلان للمنظومة .

البرهان : حيث أن $AE_\lambda = \lambda E_\lambda$ فإن :

$$\begin{aligned} AY_\lambda &= A(e^{\lambda t} E_\lambda) \\ &= e^{\lambda t} A(E_\lambda) = \lambda e^{\lambda t} E_\lambda \\ &= \lambda Y_\lambda \dots\dots(*) \end{aligned}$$

ولكن

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Y_\lambda &= E_\lambda \cdot \frac{d}{dt} e^{\lambda t} \\ &= \lambda e^{\lambda t} E_\lambda \\ &= \lambda Y_\lambda \dots\dots(**) \end{aligned}$$

ملاحظين أن E_λ لا تعتمد على t . نستنتج من (*) و (**) أن :

$$Y'_\lambda = AY_\lambda$$

أي أن Y_λ حل للمنظومة .

والآن لنفرض أن Y_2, Y_1 قيمتان ذاتيتان للمصفوفة A ولن E_2, E_1 هي المتجهات الذاتية المقابلة لهما . ولنفرض أن $E_2 = e^{i\omega_2} E_2, Y_1 = e^{i\omega_1} E_1$. فإذا كان

$$c_1 Y_2 + c_2 Y_1 = 0$$

فإن

$$c_1 Y_2(t) + c_2 Y_1(t) = 0$$

لكل قيم t في R (حسب نظرية 2.2) آخذين بعين الاعتبار أن مدخولات A متصلة على R .

إذن :

$$c_1 Y_2(0) + c_2 Y_1(0) = 0$$

$$Y_2(0) = E_2, Y_1(0) = E_1 \quad \text{ولكن}$$

وعليه

$$c_1 E_1 + c_2 E_2 = 0$$

ولكن من خصائص المتجهات الذاتية للمصفوفات (راجع الوحدة الأولى) فإن المتجهات الذاتية المقابلة لقيم ذاتية مختلفة تكون مستقلة ذاتية . إذن لا بد أن يكون : $c_1 = c_2 = 0$. وبذلك يكون Y_2, Y_1 مستقلة . ولا بد من ملاحظة أنه ما ينطبق على λ_1, λ_2 ينطبق على أي عدد من القيم الذاتية . وهذا ينهي برهان النظرية .

ولعلنا نضح الآن كيف نحل المنظومة باستخدام القيم الذاتية . رسدوف نلخص الطريقة للحالة الأولى وهي القيم الذاتية للمصفوفة A مختلفة وحقيقية . أما الخطوات :

(1) جد المصفوفة A للمنظومة .

(2) جد القيم الذاتية للمصفوفة A وذلك بحل المعادلة

$$|A - \lambda I| = 0$$

(3) لنفرض أن $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ هي القيم الذاتية للمصفوفة وأنها كلها حقيقية مختلفة .

(4) جد المتجهات الذاتية المتعلقة بهذه القيم الذاتية ولنفرض أنها E_2, \dots, E_1 .

$$(5) \text{ نضع : } Y_1 = e^{i\omega_1} E_1, \dots, Y_n = e^{i\omega_n} E_n$$

حسب نظرية 4.1 فإن Y_1, \dots, Y_n هي حلول للمنظومة $Y' = AY$.

(6) إذا كانت $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مختلفة (بمعنى $\lambda_i \neq \lambda_j$ إذا كان $i \neq j$ حيث $1 \leq i, j \leq n$) فإن Y_1, \dots, Y_n تكون مستقلة (وفق نظرية 4.1) وبالتالي يكون الحل العام للمنظومة هو :

$$Y = c_1 e^{\lambda_1 t} E_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} E_n$$

ونذلك وفق نظرية 2.3 .

والآن إلى بعض الأمثلة على هذه الحالة .

مثال (1) : جد الحل العام للمنظومة :

$$y'_1 = 2y_1 - 3y_2$$

$$y'_2 = y_1 - 2y_2$$

الحل : المنظومة هنا ليست سوى $Y' = AY$ حيث $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

نجد القيم الذاتية للمصفوفة A :

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 3 \\ -1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \text{ومنه}$$

إذن القيم هي $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ وهي حقيقية مختلفة. نجد المتجهات الذاتية للمصفوفة A :

نجد المتجهات الذاتية للمصفوفة A :

(i) القيمة الذاتية المتعلقة بـ $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ومنه نجد أن :

$$x_1 - 3x_2 = 0$$

وعليه يمكن اختيار $x_2 = 1$ وعليه $x_1 = 3$.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ومنه}$$

وكذلك يمكن إيجاد المتجه الذاتي المتعلق بـ $\lambda = -1$ وهو في حالتنا $E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

وعليه يكون الحل العام للمنظومة :

$$Y = c_1 e^x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

أي أن :

$$y_1 = 3c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

$$y_2 = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

مثال (2) : حل المنظومة

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

الحل : كما في المثال السابق نجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة A . وبحل المعادلة

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

نجد أن $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

وكذلك نستطيع إيجاد للمتجهات الذاتية بحل المعادلات :

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

وإعطاء λ القيم 3 , 2 , 1 .

وبعمل ذلك نحصل على :

$$E_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

وعليه يكون الحل العام

$$Y = c_1 e^x \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{2x} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_3 e^{3x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ويجب أن نلاحظ (ونذكره بذلك) بأن المتجهات الذاتية المتعلقة بالقيمة الذاتية الواحدة تكون متجاهاً فضائياً . وما نختاره مثلاً E_1 هو عنصر من عناصر الأساس . ويمكن أن نختار أي مضاعف له دون تغيير وقع الحل العام للمنظومة .

مسائل

الوحدة الثامنة

بند (4)

جد الحل العام للمنظومات التالية :

$$(1) \quad y_1' = 2y_1 - y_2, \quad y_2' = 3y_1 - 2y_2$$

$$(2) \quad y_1' = 2y_1 + 3y_2, \quad y_2' = y_1 + 4y_2$$

$$(3) \quad y_1' = 6y_1 - 7y_2, \quad y_2' = y_1 - 2y_2$$

$$(4) \quad y_1' = -3y_1 + 8y_2, \quad y_2' = 2y_1 + 3y_2$$

$$(5) \quad y_1' = y_1 - y_2 + 4y_3, \quad y_2' = 3y_1 + 2y_2 - y_3, \quad y_3' = 2y_1 + y_2 - y_3$$

$$(6) \quad y_1' = -y_1 + y_3, \quad y_2' = -y_2 + y_3, \quad y_3' = y_1 + y_2$$

5- حالة القيم الذاتية : مركبة مختلفة

(Distinct complex roots)

نفرض أن لدينا المنظومة $Y' = AY$.

لاحظنا في البند الثالث أن كل قيمة ذاتية حقيقية λ للمصفوفة A تعطينا حلاً $Y = e^{\lambda x} E$ للمنظومة حيث E هو المتجه الذاتي المتعلق بالقيمة λ . ولاحظنا في البند الرابع أن القيم الذاتية الحقيقية المختلفة تعطينا حلولاً مستقلة للمنظومة . في هذا البند نريد علاج حالة كون أحد القيم الذاتية مركباً ، وماذا لو كان عندنا جذرين مركبين مختلفين . ونذكر هنا أن كل جذر مركب يلحق به مرافقه . فلا نعد ذلك اختلافاً .

ونبدأ بالنظرية التالية :

نظرية 5.1 : نفرض أن المصفوفة A لها قيمة ذاتية مركبة $\lambda = a + ib$ (و مرافقها $\bar{\lambda} = a - ib$) وكان $E = B_1 + iB_2$ متجهها ذاتياً متعلقاً بـ λ ، حيث مدخولات كل B_1, B_2 حقيقية فإن المنظومة $Y' = AY$ لها حلان مستقلان هما :

$$Y_1 = (e^{ax} \cos bx) B_1 - (e^{ax} \sin bx) B_2$$

$$Y_2 = (e^{ax} \sin bx) B_1 + (e^{ax} \cos bx) B_2$$

البرهان : حيث أن $AE = \lambda E$ و $\frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$ فإن $Y = e^{\lambda x} E$ حل للمنظومة $Y' = AY$ وذلك بسبب :

$$\begin{aligned} Y' &= \frac{d}{dx} (e^{\lambda x} E) = \lambda e^{\lambda x} E = \lambda Y \\ &= AY. \end{aligned}$$

وكذلك : $\bar{Y} = e^{\bar{\lambda} x} \bar{E}$ حل لنفس المنظومة وذلك :

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= \frac{d}{dx} (e^{\bar{\lambda} x} \bar{E}) = \bar{\lambda} e^{\bar{\lambda} x} \bar{E} = \bar{\lambda} \bar{Y} \\ &= A \bar{Y}. \end{aligned}$$

ملاحظين أن $\bar{\lambda}$ هي قيمة ذاتية وأن \bar{E} متجه ذاتي متعلق بالقيمة الذاتية $\bar{\lambda}$.

ولكننا لا نريد أن نستخدم الأس المركبة أو المدخولات المركبة . ولذلك لا بد من تغيير شكل Y بحيث لا تظهر الأس والمدخولات المركبة . من أجل ذلك نستخدم قانون أويلر :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

ويكون :

$$Y = e^{(a+ib)x} (B_1 + i B_2) = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) (B_1 + i B_2)$$

$$\bar{Y} = e^{(a-ib)x} (B_1 - i B_2) = e^{ax} (\cos bx - i \sin bx) (B_1 - i B_2)$$

وحيث أن كلا من Y , \bar{Y} حل للمنظومة $Y' = A Y$, فكل من Y و \bar{Y} حلان مستقلان وفق قواعد الاستقلال التي

$$Y_1 = \frac{e^{ax} E + \bar{E} e^{ax}}{2} = e^{ax} [B_1 \cos bx - B_2 \sin bx]$$

$$Y_2 = \frac{e^{ax} E - \bar{E} e^{ax}}{2} = e^{ax} [B_2 \cos bx + B_1 \sin bx]$$

وكلا الحلين لا اثر للأعداد المركبة فيهما . وهما أيضاً مستقلان وفق قواعد الاستقلال التي ناقشناها في الوحدة الأولى .

وهذا ينهي البرهان .

إذن وفق هذه النظرية فإن كل جذر مركب (ومرافقه) يعطينا حلين مستقلين .

والآن لنأخذ بعض الأمثلة .

مثال (1) : حل المنظومة $Y' = A Y$ حيث $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

الحل : نجد القيم الذاتية للمصفوفة A :

$$|A - \lambda I| = 0$$

ومنه $\lambda^2 - 1 = 0$. إذن القيم الذاتية للمصفوفة A هي $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ وعليه

$$a = 0, b = 1$$

نجد الآن المتجهات الذاتية ، وذلك بحل المعادلة : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$:

$$\text{ونجد أن } E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

وعليه

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B_1 + iB_2$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B_1 - iB_2$$

وحسب نظرية 5.1 فإن حلول المنظومة هي :

$$Y_1 = (\cos x) B_1 - (\sin x) B_2$$

$$Y_2 = (\sin x) B_1 - (\cos x) B_2$$

والحل العام هو $Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2$.

مثال (2) : جد الحل العام للمنظومة $Y' = AY$ حيث $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

الحل : نجد أولاً القيم الذاتية للمصفوفة A :

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ومنه $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$. وحذور هذه المعادلة هي :

$$\lambda_2 = -2 - i, \quad \lambda_1 = -2 + i$$

ومنه $a = -2$, $b = 1$.

ثم بعد ذلك نجد المتجهات الذاتية لـ A :

ولو قمنا بالحسابات لوجدنا أن :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B_1 + iB_2$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B_1 - iB_2$$

وعليه :

$$Y_1 = (e^{2x} \cos x) B_1 - (e^{2x} \sin x) B_2$$

$$Y_2 = (e^{2x} \sin x) B_1 + (e^{2x} \cos x) B_2$$

والحل العام هو $Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2$

حل المنظومات التالية :

$$(1) \quad Y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad Y' = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 10 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 70 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad Y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad Y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(Repeated eigen values)

6- حالة التكرار

ماذا لو كانت إحدى القيم الذاتية مكررة سواء كانت حقيقية أم مركبة ؟ ما هي الحلول التي تنتجها هذه القيمة ؟
ذلك موضوع هذا البند .
وليك النظرية التي تعطينا للنتيجة في هذا المجال في حالة القيم الحقيقية .

نظرية 6.1 : (i) لنفرض أن λ قيمة ذاتية حقيقية للمصفوفة A ومكررة k من المرات . فإن المنظومة $Y' = AY$ لها k من الحلول المستقلة من الشكل :

$$Y_1 = e^{\lambda x} E_{11}$$

$$Y_2 = e^{\lambda x} E_{21} + x e^{\lambda x} E_{22}$$

$$\vdots$$

$$Y_k = e^{\lambda x} E_{k1} + x e^{\lambda x} E_{k2} + \dots + x^{k-1} e^{\lambda x} E_{kk}$$

حيث E_{ij} عناصر في R^n .

ويراهن هذه النظرية فوق مستوى هذا الكتاب . ولذلك لا نستطيع أن نعرضه هنا (خوفاً عليك من إنهاء الصفحة) .
إن كل قيمة ذاتية تعطينا حلولاً مستقلة بعدد مرات تكرارها ، (ولقد مرت معنا مثل هذه الفكرة في وحدة المعادلات الخطية ذات العوامل الثابتة) .

وإنّ الآن بلى بعض التأمّنة

مثال (1) : حل المنظومة

$$y_1' = -2y_1 - 3y_2$$

$$y_2' = 3y_1 + 4y_2$$

الحل : هنا المنظومة هي $Y' = AY$ حيث $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

نجد القيم الذاتية للمصفوفة A :

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 = 0$$

وعليه $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

نجد الآن المتجهات الذاتية المتعلقة بالقيمة $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ومن هذه نحصل على $E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ متجه ذاتي للمصفوفة A (وهو أساس المتجه الأساسي للمتجهات الذاتية للقيمة $\lambda = 1$).

إن من نظرية 4.1 يكون $Y_1 = e^* E$ هو الحل الأول للمنظومة . ونحتاج أن نجد حلاً آخر Y_2 مستقلاً عن Y_1 . وهنا نستخدم نظرية 6.1 . فشكل Y_2 هو :

$$Y_2 = e^* B + x e^* C$$

$$\text{حيث } C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

وحتى نجد Y لا بد من إيجاد c_1, c_2, b_1, b_2 . وهذه نجدها بالتعويض في المنظومة :

$$Y_2' = A Y_2$$

أي :

$$e^* B + e^* C + x e^* C = A [e^* B + x e^* C]$$

وعليه :

$$\begin{pmatrix} e^*(b_1 + c_1) + x e^* c_1 \\ e^*(b_2 + c_2) + x e^* c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^* b_1 + x e^* c_1 \\ e^* b_2 + x e^* c_2 \end{pmatrix}$$

وهذه تعطينا :

$$(3b_1 + 3b_2)xe^* + (b_1 + 3c_1 + 3c_2)e^* = 0$$

$$(3b_1 + 3b_2)xe^* + (-b_2 + 3c_1 + 3c_2)e^* = 0$$

ومن تلك المعادلات نحصل على :

$$b_2 = -b_1$$

$$c_2 = -\frac{1}{3}b_1 - c_1$$

حيث b_1, c_1 قيم اختيارية .

وعليه إذا اخترنا $c_1=0$, $b_1=3$ نحصل على :

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ومنه يكون :

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} e^x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} x e^x$$

والحل العام :

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2$$

والآن ماذا لو كانت القيمة الذاتية المكررة مركبة ؟

نحن نعلم أن القيمة الذاتية للمركبة (ومرافقها) تعطيان حلين مستقلين للمنظومة . وعليه إذا

كررت القيمة الذاتية المركبة نتوقع أن تعطيان أربعة حلول . فكيف يكون ذلك ؟ لا يختلف

الوضع عن حالة القيم الحقيقية . وإليك البيان :

نظرية 5.2 : إذا كانت λ قيمة ذاتية مركبة للمصفوفة A ومكررة k من المرات . فإن

المنظومة $Y' = AY$ لها $2k$ من الحلول المستقلة من الشكل :

$$Y_1 = e^{\lambda x} E_{11}, \quad \bar{Y}_1$$

$$Y_2 = e^{\lambda x} E_{21} + x e^{\lambda x} E_{22}, \quad \bar{Y}_2$$

:

$$Y_k = x^{k-1} e^{\lambda x} E_{k1} + x e^{\lambda x} E_{k2} + \dots + e^{\lambda x} E_{kk}, \quad \bar{Y}_k$$

ومرة أخرى سوف لن نعرض برهان هذه النظرية في هذا الكتاب . وربما تتسائل شكل

الحلول الواردة في هذه النظرية يحوي على أعداد مركبة وأسس مركبة ، لكننا نريد حلولاً

خالية من الأعداد المركبة . فكيف يكون ذلك ؟ .

يمكن اتباع خطوات نظرية 5.1 للحصول على حلول حقيقية خالية من الأعداد المركبة .

ودعنا نقوم بالعملية لك فيما لو كانت λ مكررة مرتين فقط (ونترك لك ما فوق ذلك) .

نفرض أن $\lambda = a+ib$ مكررة مرتين .

من نظرية 5.1 هناك حلال للمنظومة $Y' = AY$:

$$Y_1 = (e^{ix} \cos bx) B_1 - (e^{ix} \sin bx) B_2$$

$$Y_2 = (e^{ix} \sin bx) B_1 + (e^{ix} \cos bx) B_2$$

حيث $E = B_1 + i B_2$ هو المتجه الفضائي المتعلق بـ λ .

لما الحلان الأخران فيمكن الحصول عليهما بالشكل التالي :

نظرية 6.2 نقول أن شكلهما هو :

$$Z = x e^{ix} D + C e^{ix}$$

$$\bar{Z} = x e^{ix} D + \bar{C} e^{ix}$$

$$. C = C_1 + i C_2 \quad , \quad D = D_1 + i D_2 \quad \text{حيث}$$

ولكن هذه حلول تحوي اعداداً مركبة . وحتى نحصل على حلول حقيقية بحتة نأخذ الحلين :

$$Y_3 = \frac{Z + \bar{Z}}{2}$$

$$Y_4 = \frac{1}{2i} (Z - \bar{Z})$$

وكلاهما حل للمنظومة $Y' = \Lambda Y$ لأن مجموعة حلول تلك المنظومة تشكل متجهاً فضائياً .
وعليه :

$$Y_3 = \frac{1}{2} (x e^{ix} D + x e^{ix} \bar{D} + c e^{ix} + \bar{c} e^{ix})$$

$$Y_4 = \frac{-i}{2} (x e^{ix} D - x e^{ix} \bar{D} + c e^{ix} - \bar{c} e^{ix})$$

وبالتبسيط وتجميع الحدود نحصل على :

$Y_3 = e^{ix} \cos bx [C_1 + x D_1] - e^{ix} \sin bx [C_2 + x D_2]$	(*)
$Y_4 = e^{ix} \cos bx [C_2 + x D_2] + e^{ix} \sin bx [C_1 + x D_1]$	

$$. \quad C_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} c_{21} \\ c_{22} \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{12} \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} d_{21} \\ d_{22} \end{pmatrix} \quad \text{حيث}$$

وهذا هو الشكل الذي وعدهاك به .
والآن دعنا نعرض لك مثالاً .

مثال (2) : جد الحل العام للمنظومة $Y' = AY$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{حيث}$$

الحل : أولاً نجد القيم الذاتية لـ A :

$$|A - \lambda I| = (\lambda^2 + 4)^2 = 0$$

ومنها $\lambda_1 = 2i$, $\bar{\lambda}_1 = -2i$, وكل منها مكرر مرتين .

نجد الآن متجهات ذاتية متعلقة بـ : $\lambda_1 = 2i$. ولو قمنا بالصلايات لوجدنا :

$$E = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = B_1 + iB_2$$

هو متجه ذاتي لـ A .

ووفق نظرية 5.1 فإن هناك حلان :

$$Y_1 = \cos 2x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin 2x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos 2x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_2 = \sin 2x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos 2x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2x \\ \sin 2x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

والآن من الشكل (*) الذي حصلنا عليه من نظرية 6.2 فإن :

$$Y_3 = \cos 2x [C_1 + xD_1] - \sin 2x [C_2 + xD_2]$$

$$Y_4 = \cos 2x [C_2 + xD_2] + \sin 2x [C_1 + xD_1]$$

حيث لا بد من إيجاد C_1 , D_1 , C_2 , D_2 .

ونستطيع أن نجد ما بالتعويض في المعادلة . ولو قمنا بذلك لوجدنا :

$$Y_3 = \sin 2x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos 2x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix}$$

$$Y_4 = \cos 2x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin 2x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\cos 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix}$$

$$. C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ وأنه يمكن اختيار } D_1 = D_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ أي أن الحسابات تعطينا}$$

وقبل أن ننهي البند عند هذا الحد نود أن نذكر لك أن المصفوفة A لها متجهان ذاتيان مستقلان متعلقان بالقيمة $\lambda = 2i$ وهما

$$E_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$. Y_2, Y_1 \text{ أعطانا الحلين } E_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ والمتجه}$$

$$\text{والمتجه } E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ يعطينا بنفس الطريقة حسب نظرية 5.1 حلان :}$$

$$Y_3 = \cos 2x D_1 - \sin 2x D_2$$

$$= \cos 2x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin 2x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix}$$

وكنك :

$$Y_4 = \sin 2x D_1 + \cos 2x D_2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\cos 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix}$$

حيث $E_2 = D_1 + i D_2$.

ملاً لاحظت أننا حصلنا على نفس مجموعة الحلول Y_1, \dots, Y_4 ؟

جد الحل العام للمنظومات التالية :

$$(1) \quad Y' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad Y' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad Y' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad Y' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$(5) \quad Y' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$(6) \quad Y' = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$(7) \quad Y' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

7- المنظومات غير المتجانسة.

(Non - Homogenous systems)

في البنود السابقة عالجنا مسألة حل المنظومة $Y' = A Y$. وفي هذا البند سوف

نعالج حل المنظومة $Y' = A Y + F$.

ولا بد من الملاحظة أنه إذا كان Y_h هو الحل العام للمنظومة $Y' = A Y$ وكان

Y_p هو حل خاص للمنظومة $Y' = A Y + F$ فإن $Y_h = Y_h + Y_p$ هو الحل العام

للمنظومة $Y' = A Y + F$. وهذا يذكرنا بالحل العام والمعالجات التي قمنا بها للمعادلات

$L(y) = f$ في الوحدة الرابعة .

وإيجاد Y_h هو إيجاد الحل العام للمنظومة $Y' = A Y$. وهذا ما قمنا به في البنود السابقة .

أما كيف نجد Y_p فهو موضوع هذا البند .

وهناك طريقتان لإيجاد Y_p :

(1) طريقة العوامل غير المعينة .

(2) طريقة تغير الوسطاء .

ولنبدأ بالطريقة الأولى :

طريقة العوامل غير المعينة

هذه الطريقة تصلح إذا كان F من الشكل :

$$F(t) = (\cos at)B, \quad F(t) = (\sin at)B, \quad F(t) = e^{at}B, \quad F(t) = \sum_{m=0}^n t^m B_m$$

أو أن تكون خليطاً من هذه الأشكال ، حيث B, B_m عناصر في R^n (n هي المرتبة A) .

ويكون Y_p له نفس شكل F في كل من هذه الحالات ، على النحو التالي :

$$Y_p = \sum_{m=0}^n t^m C_m \quad : \quad F(t) = \sum_{m=0}^n t^m B_m \quad (1)$$

حيث C_m هي العوامل التي يراد تحديدها .

$$Y_p = e^{at} C \quad : \quad F(t) = e^{at} B \quad (2)$$

حيث C عامل يراد تحديده .

$$: F(t) = \cos at \quad \text{أو} \quad F(t) = \sin at \quad (3)$$

$$Y_p = \cos at \, C_1 + \sin at \, C_2$$

حيث C_1, C_2 هي العوامل التي يراود تحديدها .

وتوجد العوامل في جميع الحالات عن طريق التعويض في المعادلة . ولنأخذ أمثلة على ذلك .

مثال (II) : جد Y_p للمنظومة $Y' = AY + F$ حيث :

$$. \quad F(t) = t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

الحل : هنا $F = tB$ وعليه فإن $Y_p = C_0 + tC_1$. نعوض في المنظومة

$$Y_p' = AY_p + F$$

لتحصل على :

$$\text{ولكن } Y_p' = C_1 . \text{ ومنه :}$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} [C_0 + tC_1] + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$. \quad C_0 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{pmatrix} , \quad C_1 = \begin{pmatrix} c_{21} \\ c_{22} \end{pmatrix} \text{ لنفرض أن}$$

إذن

$$\begin{pmatrix} c_{21} \\ c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} + t c_{21} \\ c_{12} + t c_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} + t c_{21} + 2c_{12} + 2t c_{22} + t \\ 2c_{11} + 2t c_{21} + 3c_{12} + 3t c_{22} + 3t \end{pmatrix}$$

ومنه

$$c_{21} = c_{11} + 2c_{12} + (c_{21} + 2c_{22} + 1)t$$

$$c_{22} = 2c_{11} + 3c_{12} + (2c_{21} + 3c_{22} + 3)t$$

وعليه :

$$c_{22} = c_{11} + 2c_{12}$$

$$c_{21} + 2c_{22} + 1 = 0$$

$$c_{22} = 2c_{11} + 3c_{12}$$

$$2c_{21} + 3c_{22} + 3 = 0$$

نحل هذه المعادلات لتحصل :

$$c_{22} = 1, \quad c_{21} = -3, \quad c_{12} = -7, \quad c_{11} = 11$$

إذن :

$$Y_p = \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

مثال (2) : جد للمنظومة $Y' = AY + F$ حيث :

$$F(t) = \sin 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

الحل : حيث $F = (\sin 2t) B$ ، فإن :

$$Y_p = (\sin 2t) C_1 + (\cos 2t) C_2$$

حيث C_1, C_2 يراد تعيينها . ولعمل ذلك نعوض Y_p في المنظومة :

$$Y_p' = AY_p + F$$

ولكن $AY_p = Y_p$. وكذلك :

$$Y_p' = 2\cos 2t C_1 - 2\sin 2t C_2$$

إذن :

$$2\cos 2t C_1 - 2\sin 2t C_2 = (\sin 2t) C_1 + (\cos 2t) C_2 + (\sin 2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نجمع الحدود المتشابهة :

$$\cos 2t (2C_1 + C_2) - \sin 2t \left[2C_2 - C_1 - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0$$

إذن :

$$2C_1 + C_2 = 0$$

$$2C_2 - C_1 - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} c_{21} \\ c_{22} \end{pmatrix} \text{ لنفرض أن}$$

إذن

$$2c_{11} + c_{21} = 0$$

$$2c_{21} + c_{22} = 0$$

$$2c_{21} - c_{11} - 1 = 0$$

$$2c_{22} - c_{12} - 1 = 0$$

ويحل هذه المعادلات نحصل على :

$$c_{21} = \frac{2}{5} , \quad c_{11} = -\frac{1}{5} , \quad c_{22} = \frac{2}{5} , \quad c_{12} = -\frac{1}{5}$$

إذن :

$$C_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} , \quad C_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

ويكون :

$$Y_p = \sin 2t \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} + \cos 2t \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

والآن إلى الطريقة الثانية لإيجاد حلاً خاصاً للمنظومة $Y' = AY + F$.

طريقة تغيير الوسطاء

فكرة تغيير الوسطاء ليست جديدة . فهي نفس فكرة إيجاد حل خاص للمعادلة $L(y) = f$ التي وردت في الوحدة الرابعة .

وملخص الطريقة كما يلي :

المنظومة المعطاة هي $Y' = AY + F$.

(1) نجد الحل العام للمنظومة $Y' = AY$ ، ولنفرض أنه :

$$Y_h = c_1 Y_1 + \dots + c_n Y_n$$

حيث n هو مرتبة المصفوفة A ،

(2) يكون شكل Y_p هو :

$$Y_p(x) = c_1(x) Y_1(x) + \dots + c_n(x) Y_n(x)$$

أي أننا غيرنا للتوليد c_i إلى لترات في x .

(3) نجد هذه الاقترانات c_i عن طريق التعويض في المعادلة . والتعويض واستخدام

كون Y_1 حل للمنظومة $Y' = AY$. يتركنا مع :

$$c_1'(x)Y_1(x) + \dots + c_n'(x)Y_n(x) = F(t)$$

هذه تمطينا n من المعادلات حيث أن Y_1, \dots, Y_n, F هي متجهات في R^0 .

وطريقة تغيير الوسطاء تصلح لكل أنواع F .
والآن إلى بعض الأمثلة.

مثال (2) : جد الحل العام للمنظومة $Y' = AY + F$ حيث :

$$F(x) = \begin{pmatrix} -2e^x \\ 9x \\ e^x \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

الحل : نلاحظ هنا أنه يمكن إيجاد Y_p بطريقة العوامل غير المعينة . إلا أننا سنستخدم طريقة تغيير الوسطاء لفعل ذلك .

وعليه نجد أولاً الحل العام للمنظومة $Y' = AY$.

نبدأ بإيجاد القيم الذاتية : $|A - \lambda I|$

ومنه $(\lambda - 3)^2(\lambda + 1) = 0$. وعليه :

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$ (ومكررة مرتين) .

نجد المتجهات الذاتية المتعلقة بهذه القيم . ولو أجرينا الحسابات لوجدنا :

$$E_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{يقابل} \quad \lambda = -1$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{يقابلان} \quad \lambda = 3$$

وعليه $Y_3 = e^{3x}E_3$, و $Y_2 = e^{3x}E_2$, $Y_1 = e^{-x}E_1$
ومنه

$$Y_h = c_1 \begin{pmatrix} -2e^{-x} \\ 0 \\ e^{-x} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3x} \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2e^{3x} \\ 0 \\ e^{3x} \end{pmatrix}$$

والآن حتى نجد Y_p نجد $c_1(x), c_2(x), c_3(x)$ والتي تحقق

$$c_1'(x)Y_1(x) + c_2'(x)Y_2(x) + c_3'(x)Y_3(x) = F(x)$$

كما جاء في خطوات طريق تغيير الوسطاء.

ولو قمنا بذلك لوجدنا :

$$c_1'(x) = e^{2x}, \quad c_2'(x) = 9xe^{-3x}, \quad c_3'(x) = 0$$

ومنه

$$c_1(x) = \frac{e^{2x}}{2}, \quad c_2(x) = -3xe^{-3x} - e^{-3x}, \quad c_3(x) = 0$$

وعليه يكون :

$$Y_p(x) = \frac{e^{2x}}{2} Y_1 + (-3xe^{-3x} - e^{-3x}) Y_2$$

ويكون الحل العام :

$$Y_p = Y_h + Y_p$$

دعنا الآن نهي هذا البند عند هذا الحد . لننتقل إلى الفصل الأخير من كتابنا هذا ، وهي المحطة الأخيرة في صحبتنا معا .

جد الحل العام للمنظومات التالية :

$$(1) \quad Y' = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4e^{3t} \\ 4e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad Y' = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4e^t \\ 12e^t \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad Y' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-t} + 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad Y' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$(5) \quad Y' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5e^{3t} \\ 5e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$(6) \quad Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 - e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

الوحدة التاسعة

تطبيقات المعادلات

" Applications of Differential Equation "

في هذه الوحدة سوف نعطي بعض التطبيقات العملية للمعادلات التفاضلية سواء في الفيزياء أو غيرها .
وعندما نتحدث عن التطبيقات للمعادلات التفاضلية لا نعني شيئاً جديداً بل نعني أن هناك ظواهر كثيرة (في الفيزياء أو الكيمياء أو غيرها) تحكمها معادلات تفاضلية وبحل المعادلة نستطيع أن ندرس الظاهرة .
وسوف نفرّد لكل مجموعة من المعادلات تطبيق أو تطبيقين .

1- تطبيقات معادلات الرتبة الأولى .

(Application of first order differential equations)

هناك العديد من الظواهر في الحياة العملية يحكمها معادلة من الرتبة الأولى . وفي هذا البند سوف نعرض تطبيقين لمعادلات الرتبة الأولى .

(A) تطبيق رياضي (في فرع الهندسة : Geometry) .

(B) تطبيق فيزيائي (مسائل الخلط : Mixture Problems) .

ولنبداً بأولهما .

(A) المسارات المتعامدة (Orthogonal Trajectories)

أولاً ماذا نضي بالمسار ؟

نحن نعرف أن المعادلة في x و y في المستوى تمثل منحنياً معيناً . فمثلاً $x^2 + y^2 = r^2$ يمثل دائرة مركزها $(0, 0)$ ونصف قطرها r . فإذا تغيرت قيمة r تغيرت الدائرة . وعليه :

تعريف 1.1 : المسار هو عائلة من المنحنيات تمثلها عائلة من المعادلات $F(x, y, c) = 0$. فكل قيمة لـ c تعطينا معادلة تمثل لنا عنصراً من عناصر العائلة .

فمثلاً $x^2 + y^2 = c^2$ هي $F(x, y, c) = 0$ حيث $F(x, y, c) = x^2 + y^2 - c^2$. وهذه تمثل عائلة من الدوائر . لكل قيمة للوسيط c ($c > 0$) نحصل على دائرة نصف قطرها c . كذلك $y = x^2 + c$ هي عائلة من المنحنيات كل عنصر فيها قطع مكافئ . وسوف نفرض في هذا الباب أن y قابل للاشتقاق بالنسبة لـ x .

لنفرض الآن أن $F(x, y, c) = 0$ ، $G(x, y, b) = 0$ هما مسارين . قد تقاطع عناصر $F(x, y, c_1) = 0$ عناصر $G(x, y, b)$ وقد لا تقاطع . لنفرض أن $F(x, y, c_1) = 0$ تقاطع $G(x, y, b_1) = 0$ عند النقطة (x_1, y_1) . عند هذه النقطة هناك مماس L_1 للمحسى $F(x, y, c_1) = 0$ ومماس L_2 للمنحني $G(x, y, b_1) = 0$. L_1 ، L_2 مستقيمان يتقاطعان في النقطة (x_1, y_1) .

يكون المنحنيان متعامدان عند (x_1, y_1) إذا كان L_1 عمودي على L_2 .

والآن نعرف المسارات المتعامدة :

تعريف 1.2 : نسمي $F(x,y,c)=0$ ، $G(x,y,b)=0$ مسارين متعامدين إذا كان كل عنصر في المسار الأول عمودياً على كل عنصر في المسار الثاني عند تقاطع تقاطعهما .

والمسألة الآن : إذا أعطينا مساراً $F(x,y,c)=0$ فكيف نجد المسار العمودي عليه ؟ .

ملخص الطريقة

(i) نجد المعادلة التفاضلية التي حلها هو $F(x,y,c)=0$.

وهذا يتم عن طريق تفاضل معادلة المسار ثم حذف الوسيط c . ولنفرض أن المعادلة هي $\hat{F}(x,y,y')=0$.

(ii) نضع $-\frac{1}{y'}$ بدلاً من y' في المعادلة التفاضلية $\hat{F}(x,y,y')=0$ لنحصل على $\hat{F}(x,y,-\frac{1}{y'})=0$.

(iii) نحل المعادلة $\hat{F}(x,y,-\frac{1}{y'})=0$ لنحصل على مسار $G(x,y,b)=0$ وهو المسار المطلوب.

والآن إلى بعض الأمثلة .

مثال (1) : جد المسار المعامد للمسار $y=cx^2$.

الحل : نتبع خطوات الطريق أعلاه :

$$y'=2cx \quad \text{إذن} \quad c=\frac{y'}{2x} \quad \text{وعليه} \quad y=\frac{y'}{2x} \cdot x^2 \quad \text{أي أن} \quad y'=\frac{2y}{x} \quad \text{هي المعادلة التي حلها} \\ y=cx^2$$

وعليه المعادلة التفاضلية التي حلها هو المسار المعامد هي :

$$-\frac{1}{y'}=\frac{2y}{x}$$

$$2y \, dy + x \, dx = 0$$

وهي معادلة مقبولة المتغيرات . نحلها لنجد :

$$y^2 + \frac{x^2}{2} = b$$

وهي المسار المعامد . ونلاحظ هنا أن كل عنصر في هذا المسار هو قطع ناقص ($b > 0$) .

مثال (2) : جد المسار المعامد للمسار $x^2 + y^2 = 2cy$.

المسألة : نجد أولاً المعادلة التفاضلية التي حلها هو معادلة المسار :

$$2x + 2yy' = 2cy'$$

$$c = \frac{x^2 + y^2}{2y} \quad \text{ولكن من معادلة المسار :}$$

$$2x + 2yy' = 2 \left(\frac{x^2 + y^2}{2y} \right) y' \quad \text{إذن}$$

أي أن المعادلة التفاضلية هي :

$$y' = \frac{-2xy}{y^2 - x^2} \quad \dots\dots\dots (*)$$

نضع $-\frac{1}{y'}$ بدلاً عن y' في المعادلة (*) نتحصل على $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$ وهي المعادلة التي حلها

المسار المعامد . هذه المنحنى متجانسة . نحلها كما تعاملنا في الوحدة الثانية لتحصل على :

$$x^2 + y^2 = bx$$

وهي المسار المعامد .

(B) مسألة الخليط

هناك عدة مسائل متعلقة بالخليط (أو المحاليل) . لكننا سوف نعرض أحدها (وربما أبسطها) .

ملخص المسألة :

رعاء يحتوي على محلول ذي كثافة معينة . نضيف لهذا المحلول محلولاً آخر (ذا كثافة مختلفة) ويخرج الخليط المحرك دائماً (لتكون الكثافة الجديدة متجانسة في المحلول) من الإناء . ونود معرفة الكثافة في أي زمن ! أو مقدار المادة المذابة في السائل في أي زمن t .

وحتى نجد المعادلة التي تحكم هذه المسألة :

نفرض أن y هو مقدار المادة المذابة في السائل عند أي زمن t . فإن معدل التغير الآتي لـ y هو $\frac{dy}{dt}$

وهذا التغير الآتي ليس سوى الفرق بين معدل ما يضاف ومعدل ما يخرج (أو يطرد) من المادة .

والمعدلان الأخيران يكونان عادة معلومين . إذن المعادلة التي تحكم المسألة هي :

$$\frac{dy}{dt} = \text{(معدل ما يضاف من المادة)} - \text{(معدل ما يطرد من المادة)}$$

وتسمى هذه المعادلة معادلة المراقبة .

والآن إلى بعض الأمثلة .

مثال (3) : وعاء سعة 200 غالون مملوء بالماء الصافي . وفي لحظة ما بدأنا بإضافة محلول الملح (ماء مذاب فيه ملح) بمعدل غالونين في الدقيقة ، وفي الوقت نفسه نطرد المحلول (المحرك بانتظام) من الوعاء بمعدل غالونين في الدقيقة . فإذا كان تركيز المحلول له باونداً للجالون الواحد ، فجد مقدار الملح في أي زمن .

الحل : جزء كبير من حل السؤال يكمن في فهم نص السؤال وفهم معطيات السؤال .
نلاحظ أولاً أن مقدار المحلول المتبقي هو نفس مقدار المحلول المزاح (حجماً) . ولذلك يكون عدد الجالونات من المحلول في الوعاء ثابت وهو 200 غالون .
وعليه إذا كان $y(t)$ هو مقدار الملح في الوعاء في أي زمن t فإن تركيز المحلول عند أي زمن t هو $\frac{y(t)}{200}$

وعليه فإن معدل إزالة الملح من الوعاء هو $2 \left(\frac{y}{200} \right)$ أما معدل إضافة الملح فهي 2×1 (وهي ليست سوى تركيز المحلول له باونداً في الجالون) مصروب في معدل إضافة المحلول [2 غالون في الدقيقة] .

وعليه من معادلة المحافظة :

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{y}{100}$$

وهذه معادلة من الدرجة الأولى مقبولة المتغيرات . نحلها لنحصل على :

$$-\ln|800 - y| = \frac{t}{100} + c$$

أي :

$$800 - y = b e^{-\frac{t}{100}}$$

ولكن من المعطيات ، عندما بدأنا نضيف المحلول إلى الوعاء كان مقدار الملح في الوعاء صفراً . أي أن $y(0) = 0$. ومن هذا نحصل على $b = 88$.
إذن مقدار الملح عند أي زمن t هو :

$$y = 88 \left(1 - e^{-\frac{t}{100}} \right)$$

وهذا ينهي الحل .

ولا بد من أن نذكر هنا أن الشرط الأولي $y(0) = 0$ قد يتغير من مسألة إلى أخرى . فمثلاً إذا كان الوعاء يحوي على 12 باونداً من الملح قبل البدء في إضافة المحلول فإن $y(0) = 12$.

ومثلاً إذا أعطينا أن تركيز المحلول بعد 3 دقائق هو $\frac{1}{2}$ باوند للغالون الواحد . فإن الشرط الأولي يصبح $y(3) = \frac{1}{2} \cdot 200 = 100$.

وهكذا لا بد من فهم المعطيات في المسألة .

مسائل

الوحدة التاسعة

بند (1)

جد المسارات المتعامدة لكل من المسارات التالية :

$$(1) \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{2c^2} = 1$$

$$(2) xy = c$$

$$(3) y = x - 1 + ce^{-x}$$

$$(4) x(y^2 + 1) + xy^2 = c$$

$$(5) (x + y)^2 = cx^2$$

$$(6) y = \ln(x^3 + c)$$

(7) وعاء يحوي على 200 غالون من الماء الصافي . أضيف إليه محلول بتركيز 3 باوند/ غالون بمعدل 4 غالون / دقيقة .

(a) إذا حرك المزيج جيداً وترك يخرج من الوعاء بمعدل 4 غالون / الدقيقة ، جد مقدار الملح في الوعاء بدلالة الزمن .

(b) بعد كم دقيقة يصبح تركيز المحلول 2 باوند / غالون .

(8) حل المسألة السابقة إذا كان معدل ترك المزيج للوعاء هو 5 غالون / دقيقة .

(9) وعاء يحوي على 10 غالون ماء بها 5 باوند من الملح . أضيف إليه محلول ملح ذو تركيز 3 باوند / غالون بمعدل 2 غالون / دقيقة ، وترك المزيج الجديد يخرج من الوعاء بنفس المعدل . ما مقدار الملح الموجود في الوعاء بعد 1.5 دقيقة؟

2- تطبيقات للمعادلات الخطية من المرتبة الأولى . (Application of first order linear differential equations)

سوف نعرض في هذا البند تطبيقين :

(1) قانون نيوتن للتبريد .

(2) الحركة بوجود قوة احتكاك تعتمد على السرعة .

والقضية مرة أخرى أن هناك معادلة تفاضلية لكل مسألة من هاتين المسألتين تحكمها . ولنبداً بالتطبيق الأول .

قانون نيوتن للتبريد

(Newton's law of cooling)

ما هي المسألة هنا ؟

جسم درجة حرارته $y(t)$ عند الزمن t . غمس هذا الجسم في وعاء حافظ للحرارة ذو درجة حرارة ثابتة T . والمطلوب معرفة تغير حرارة الجسم بعد غمره في الوعاء .

إن قانون نيوتن للتبريد يقول :

إن معدل تغير درجة حرارة الجسم متناسبة طردياً مع الفرق بين درجة حرارة الوعاء T ودرجة حرارة الجسم $y(t)$.

بمعنى آخر :

$$\frac{dy}{dt} = \lambda (T - y(t)) \quad \lambda > 0 .$$

أي :

$$\frac{1}{\lambda} \frac{dy}{dt} + y(t) = T \quad \dots\dots\dots (*)$$

هذه معادلة خطية من المرتبة الأولى . نعرف كيف نحلها كما مرّ في الوحدة ثنائية . ونحل هو .

$$y = T + ce^{-\lambda t}$$

أما c فإننا نجد من الشروط الأولية كأن تكون درجة حرارة الجسم عند $t = 0$ مقداراً ما y_0 مثلاً .

حينها $y_0 = T + c$ أي أن $c = y_0 - T$. وعليه تصبح المعادلة التي تحكم المسألة :

$$y = T - (T - y_0)e^{-\lambda t}$$

ولنأخذ مثلاً على ذلك .

مثال (1) : جسم حرارته $72^{\circ} F$. وضع في العراء حيث درجة حرارة الجو $20^{\circ} F$. بعد خمس دقائق أصبحت درجة حرارة الجسم $55^{\circ} F$. بعد كم دقيقة تصبح درجة حرارة الجسم $32^{\circ} F$.

الحل : هذه مسألة على قانون نيوتن للتبريد . والمعادلة التي تحكم المسألة هي المعادلة (*) وبعد حلها نحصل على :

$$y = T - (T - y_0)e^{-kt}$$

والآن لنعرف على المعطيات .

T : هي درجة حرارة الوعاء الحافظ للحرارة (وهو الجو في حالتنا) ومقدارها $20^{\circ} F$.
 y_0 : درجة حرارة الجسم قبل إخراجه إلى العراء أي عند $t = 0$. وفي حالتنا $72^{\circ} F$.
 y وعليه :

$$\begin{aligned} y &= 20 - (20 - 72)e^{-kt} \\ &= 20 + 52e^{-kt} \end{aligned}$$

لم يبق في المعادلة مجهول سوى k . ولكن معطى لنا أن $55 = y(5)$. إذن

$$55 = 20 + 52e^{-5k}$$

وهذه المعادلة تعطينا مقدار k . ولو حسبنا لوجدنا $k = \frac{1}{5} \ln \frac{52}{35}$. إذن الشكل النهائي للمعادلة :

$$y = 20 + 52e^{-\left(\frac{1}{5} \ln \frac{52}{35}\right)t}$$

والمطلوب الآن إيجاد t عندما يكون $y = 32$. أي أن علينا أن نجد t من المعادلة :

$$32 = 20 + 52e^{-\left(\frac{1}{5} \ln \frac{52}{35}\right)t}$$

ولو قمنا بالحل لوجدنا أن :

$$t = 5 \ln \left(\frac{12}{52} \right) / \ln \left(\frac{35}{52} \right) \approx 18.5$$

إذن لا بد من الملاحظة أن المعادلة $y = T - (T - y_0)e^{-kt}$ تحوي على ثابتين هما y_0 , $-k$.

والمعطيات يجب أن تكون قادرة وكافية لتجد منها y_0 , $-k$. ثم بعد ذلك نجد ما نريد لإيجاده

وندرس ما نريد دراسته على ضوء المعادلة الأخيرة للخالية من الثوابت .

والآن إلى التطبيق الثاني .

الحركة بوجود قوة احتكاك متناسبة مع السرعة

(Motion in the presence of velocity - dependent friction)

ماهي المسألة هنا ؟

حسم ذو كتلة m يتحرك تحت تأثير قوة $F(t)$ ولكن هناك قوة احتكاك متناسبة مع السرعة .
 هنا من قانون نيوتن الثاني للحركة :

$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = F(t) - \lambda \frac{dy}{dt}$$

حيث $\lambda \frac{dy}{dt}$ هي قوة الاحتكاك ، و $y(t)$ هي المسافة التي تحركها الجسم في زمن t .
 وكما نعلم فإن $\frac{dy}{dt}$ هي السرعة . وعليه تصبح المعادلة التي تحكم الحركة هي :

$$m \frac{dv}{dt} = F(t) - \lambda v$$

أو :

$$m \frac{dv}{dt} + \lambda v = F(t) \quad \dots\dots\dots (**)$$

وهي معادلة خطية من المرتبة الأولى .

نحلها كما في الوحدة الثالثة . وإذا كانت $F(t)$ ثابتة F_0 (كما في مسائل المقذوفات حيث قوة الجاذبية ثابتة) .

فإن حل المعادلة (**) يعطى :

$$v = \frac{F_0}{\lambda} + C e^{-\frac{\lambda}{m}t}$$

حيث C ثابت ما .

وهنا نجد كلا من F_0 , λ من معطيات المسألة .

ولأخذ مثال على ذلك :

مثال (2) : جسم سقط من السكون من ارتفاع 500 متر فوق سطح الأرض تحت تأثير قوة الجاذبية .
 وكان هناك قوة مقاومة الهواء والتي تتناسب مع السرعة بتأيت التناسب $\lambda = 3$ كغم /ثانية . إذا كانت
 قوة الجاذبية ثابتة حيث $m = 3$ كغم وكان $g = 9.81$. جد متى يضرب الجسم الأرض ؟.

الحل : المعادلة التي تحكم الحركة هي :

$$m \frac{dv}{dt} + \lambda v = mg$$

وحلها هو

$$v = \frac{mg}{\lambda} + c e^{-\frac{\lambda}{m}t}$$

هنا $\lambda = 3$ ، $mg = (3) \times (9.81)$. إذن

$$v = \frac{3(9.81)}{3} + c e^{-3t}$$

أي :

$$v = 9.81 + c e^{-t}$$

بقي علينا أن نجد c . ولكن السقوط من السكون يعني $v(0) = 0$ وعليه :

$$0 = 9.81 + c$$

ومنه $c = -9.81$. إذن

$$v(t) = 9.81 - 9.81 e^{-t}$$

والآن المطلوب هو بعد كم دقيقة يصبح ارتفاع الجسم عن الأرض صفراً . إذن لا بد من إيجاد معادلة

تُحكم المسافة . ولكن $v(t) = \frac{dy}{dt}$. إذن

$$\frac{dy}{dt} = 9.81 - 9.81 e^{-t}$$

ومنه

$$y = (9.81)t + 9.81 e^{-t} + b$$

وعادة في الأجسام الساقطة تعتبر نقطة الأصل هي نقطة السقوط . وعليه $y(0) = 0$. ومنه

$b = -9.81$. وعليه

$$y = (9.81)t + 9.81(e^{-t} - 1)$$

والآن المطلوب قيمة t عندما كان $y(t) = 500$.

$$500 = (9.81)t + 9.81(e^{-t} - 1)$$

ويحل هذه المعادلة نصل إلى $t \approx 51.97$ ثانية .

مسائل

الوحدة التاسعة

بند (2)

(1) دُجِه حرارة جسم ما 72°F . وضع الجسم في العراء حيث درجة الحرارة 20°F . بعد خمس دقائق وصلت حرارة الجسم 55°F . كم من الزمن يحتاج الجسم لتصبح حرارته 32°F ؟

(2) وضع جسم درجة حرارته T في غرفة درجة حرارتها ثابتة 68°F . وبعد 10 دقائق أصبحت حرارة الجسم 50°F ، وبعد 15 دقيقة أصبحت 55°F . ما هي درجة حرارة الجسم الأصلية ؟

(3) سقط جسم ذو كتلة 5 كغم من حالة السكون من على ارتفاع 1000 متر من سطح الأرض . فإذا كان سقوط الجسم بتأثير الجاذبية وكانت قوة مقاومة الهواء متناسبة مع سرعة الجسم ، وثابت التناسب كان $k = 50$ كغم/ثانية ، عين معادلة الحركة ، وحدد متى يصل الجسم الأرض ؟

(4) قُذِف جسم إلى الأسفل بسرعة أولية 50 م/ثانية . ونزك بسقط بتأثير الجاذبية . إذا كانت كتلة الجسم 5 كغم وكانت قوة مقاومة الهواء هي $10v$ - حرك ، v هي سرعة الجسم بالأمتر في الثانية . حد معادلة الحركة ؟ . وإذا كان ارتفاع الجسم عن الأرض هو 500 م ، فبعد كم ثانية يسقط الجسم ؟

3- تطبيقات للمعادلات الخطية من المراتب العليا .

(Applications of higher order linear differential equations)

هناك تطبيقات كثيرة لمعادلات المرتبة الثانية (وأكثر) الخطية . وسوف نعرض تطبيقاً واحداً

فقط :

الحركة التوافقية البسيطة

(Simple harmonic motion)

ما هي المسألة هنا ؟

جسم يتحرك بتأثير قوة متناسبة مع الإزاحة من مركز السكون .

فإذا كانت الإزاحة من مركز السكون هي $y(t)$ فإن القوة المؤثرة $F(t) = -\lambda y(t)$. ووفق قانون

نيوتن الثاني للحركة فإن المعادلة التي تحكم هذه الحركة هي :

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\lambda y$$

أو

$$m y'' + \lambda y = 0 \quad (*)$$

وهذه معادلة خطية من المرتبة الثانية .

نحلها : المعادلة المتزامنة للمعادلة (*) هي :

$$m r^2 + \lambda = 0$$

والتي جذورها $r = \pm i \sqrt{\frac{\lambda}{m}}$. وعليه يكون الحل العام :

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 \cos \sqrt{\frac{\lambda}{m}} t + c_2 \sin \sqrt{\frac{\lambda}{m}} t \quad (**) \\ &= c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \end{aligned}$$

حيث $\omega = \sqrt{\frac{\lambda}{m}}$. وحتى نجد c_1 , c_2 لا بد من شروط أولية وعادة تكون شروط على السرعة

الابتدائية . أي $y(0) = a$, $y'(0) = b$.

ومن المعادلة (**) نلاحظ أن $y(0) = a = c_1$ ولو فاضلنا المعادلة (**) وعوضنا

$t = 0$ فوجدنا $c_2 = \frac{y'(0)}{\omega}$. ومنه $y'(0) = \omega c_2$ ، ولذلك تصبح المعادلة :

$$y(t) = y(0) \cos \omega t + \frac{y'(0)}{\omega} \sin \omega t \quad \dots \dots (**)$$

و عندما تكون الحركة بدائية منتظمة حول مركز السكون فإن شكل المعادلة (***) يكون أفضل للدليل على واقع الحركة لو أخذ الشكل :

$$y(t) = A \cos(\omega t + \Phi)$$

حيث

$$\sin \Phi = \frac{-y'(0) \omega}{\sqrt{y^2(0) + \frac{y'^2(0)}{\omega^2}}} \quad , \quad \cos \Phi = \frac{y(0)}{\sqrt{y^2(0) + \frac{y'^2(0)}{\omega^2}}} \quad , \quad A = \sqrt{y^2(0) + \frac{y'^2(0)}{\omega^2}}$$

$$A = \sqrt{y^2(0) + \frac{y'^2(0)}{\omega^2}} \quad \text{تسمى سعة } y$$

وتسمى Φ زاوية الطور للاقتزان y

في حين $\frac{2\pi}{\omega}$ هي دورة y بينما $\frac{\omega}{2\pi}$ هي تذبذبة الاقتران y

مثال (1) : جسم ربط إلى زنبرك ثم بدأت الحركة بعد أن مُدَّ الزنبرك (وبطرفه الجسم) مقدار 2 سم ثم أُطلق من مرحله السكون . اذا كانت المعادلة التي تحكم الحركة هي $16y'' + 4y = 0$ وكان $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$. جد اقتران الاشارة عند أي زمن ؟ .

الحل : المعادلة $16y'' + 4y = 0$ هي خطية من المرتبة الثانية . المعادلة الملازمة :

$$16r^2 + 4 = 0$$

$$\text{ومنه } r = \pm \frac{1}{2}i$$

إن

$$y = c_1 \cos \frac{1}{2}t + c_2 \sin \frac{1}{2}t$$

وحيث أن $y(0) = 2$ فإن $c_1 = 2$. وحيث أن $c_2 = \frac{y'(0)}{1/2}$ فإن $c_2 = 0$. إذن

$$\boxed{y(t) = 2 \cos \frac{t}{2}}$$

مثال (2) : جد السعة ، الدورة ، الذنبية وزاوية الطور للحركة :

المحكومة بالمعادلة :

$$y'' + 9y = 0 , y(0) = -2 , y'(0) = -6$$

الحل : نجد أولاً w . ولكن من تعريفنا لـ w : $w = 3$.

إذن : الدورة هي $\frac{2\pi}{w}$. أي $\frac{2}{3}\pi$.

الذنبية : $\frac{w}{2\pi}$. أي $\frac{3}{2\pi}$.

السعة :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{y^2(0) + \frac{y'^2(0)}{w^2}} \\ &= \sqrt{4 + \frac{36}{9}} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

أما زاوية الطور :

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \frac{y(0)}{\sqrt{y^2(0) + \frac{y'^2(0)}{w^2}}} \\ &= \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\sin \phi = \frac{-y'(0) \cdot w}{A} = \frac{+6/3}{2\sqrt{2}} = \frac{+1}{\sqrt{2}}$$

$$\phi = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi \quad \text{أو} \quad \phi = 215^\circ \quad \text{ومنه}$$

ونكتفي بهذا القدر لنذهب إلى بند آخر .

٤- تطبيقات لمنظومات المعادلات الخطية .

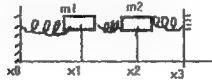
(Application of linear systems of differential equations)

هناك العديد من النظم لمنظومات المعادلات الخطية . فهناك تطبيقات في الدوائر الكهربائية وفي الأحياء وفي الإحصاء . لكننا سنعرض تطبيقاً فيزيائياً :

حركة منظومة أجسام مربوطة بزنبرك

(Coupled spring - mass systems)

لنفرض أن جسمين m_1 ، m_2 ربطتتا بزنبرك كما في الشكل (١) :



وضبطا ليتحركا حركة اهتية . ونريد أن ندرس حركة هذه المنظومة عندما تقع تحت تأثير قوة خارجية تعتمد على الزمن وقوة معيقة للحركة متناسبة مع سرعة الأجسام المعنية .

والآن لنبداً بفهم واقع المسألة .

(١) سرعة كل كتلة m_1 ، m_2 والواصل بين m_1 والنقطة x_0 (كما في شكل (2)) والواصل بين m_2 والنقطة x_3 واحد في الطول والمادة .

وعليه يكون $l_1 = l_2 = l_3 = l$ وعوامل الممتد (التي تظهر في ثلثون هوك) أيضا واحدة .
 $k_1 = k_2 = k_3 = k$.

(2) الحركة تعطي كل جسم إزاحة عن موضعه الأصلي .

فإن كانت المواضع الجديدة للأجسام بعد الإزاحة هي x_1 ، x_2 فإن :

إزاحة الجسم الأول هي : $x_1 - x_0 = l$.

إزاحة الجسم الثاني : $x_2 - x_3 = l$.

كما هو مبين في شكل (2) .

$$y_1 = x_1 - x_1(0)$$

$$y_2 = x_2 - x_2(0)$$

$$y_3 = m_1 \frac{dx_1}{dt}$$

$$y_4 = m_2 \frac{dx_2}{dt}$$

حيث $x_1(0)$, $x_2(0)$ هو وضع الجسم في مرحلة الاتزان (أو السكون) . وعليه نحصل على المعطومة :

$$y_1' = \frac{1}{m_1} y_3$$

$$y_2' = \frac{1}{m_2} y_4$$

$$y_3' = -2k y_1 + k y_2 - \frac{a}{m_1} y_3 + F_1$$

$$y_4' = k y_1 - 2k y_2 - \frac{b}{m_2} y_4 + F_2$$

وهذه منظومة من الشكل :

$$Y' = AY + F$$

حيث

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_2} \\ -2k & k & -\frac{a}{m_1} & 0 \\ k & -2k & 0 & -\frac{b}{m_2} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

طبعا ، إذا أراد أحدنا أن يجعل الأمر سهلا وبسيط . ممكن فرمى أن الأوساط المغمورة فيه منظومة الأجسام لا يولد قوة إعاقة . ولذلك $a = b = 0$.

ويمكن حل المنظومة $Y' = AY + F$ بطرق الوحدة الثامنة .

مسائل

الوحدة التاسعة

بند (3)

(1) جد السعة ، الدورة ، وزاوية الطور للحركة المحكومة بالمعادلة :

$$y'' + x^2 y = 0 , y(0) = 1 , y'(0) = \pi\sqrt{2}$$

(2) جد السعة ، الدورة ، وزاوية الطور للحركة المحكومة بالمعادلة :

$$y'' + 9y = 0 , y(0) = -2 , y'(0) = -6$$

(3) زنبرك به كتله حركته محكومة بالمعادلة :

$$16 y'' + 4y = 0$$

فإذا بدأت الحركة عندما مُطَّ الزنبرك وحدتين ثم أطلق من السكون . جد الشروط الأولية للحركة ثم حد الإقتران y الذي يحكم الحركة ؟

الأجوبة

الوحدة الأولى

بند (1) :

(1) (a) نعم	(b) لا	(c) لا	(d) نعم
(3) (a) لا	(b) نعم	(c) لا	

(5) لنفرض أن $v \neq 0$ ولكن $r \cdot v = 0$. يجب أن نبرهن أن $r = 0$. ولكن إذا كلى $r \neq 0$ فإن $\frac{1}{r}(r \cdot v) = \frac{1}{r} \cdot 0$ ولكن $\frac{1}{r}(r \cdot v) = v$. وكذلك من سؤال رقم (4) من هذا البند نحصل على $\frac{1}{r} \cdot 0 = 0$. إذن $v = 0$.

بند (2) :

(1)

$$(a) = L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(b) = L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(c) = L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(3) (a) نعم	(b) لا	(c) لا	
(5) (a) مستقلة	(b) مستقلة	(c) معتمدة	(d) معتمدة
(7) (a) مستقلة	(b) مستقلة	(c) مستقلة	(d) معتمدة

بند (3) :

(1) (a) 1	(b) 2	(c) 2	(d) 2
(3)			

$$\left\{ \left(\frac{2}{3}, 1, 0 \right), \left(-\frac{5}{2}, 0, 1 \right) \right\} \quad (a)$$

$$\{x, x^2, x^3\} \quad (b)$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (c)$$

بند (4) :

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} (b) \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 11 & 14 \end{pmatrix} (a) \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -8 & -6 \end{pmatrix} (c)$$

(d) 120 .

(c) 120

(b) 20

(2) (a) 2-

بند (5) :

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -\frac{1}{2} \quad (a) \quad (1)$$

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1 \quad (c) \quad \lambda = 2 \quad (b)$$

$$\lambda_1 = 6, \lambda_2 = -5 \quad (d)$$

(3) إذا كان $Av = \lambda v$ فإن :

$$A(av) = aAv = a\lambda v = \lambda(av)$$

الوحدة الثانية

بند (1) :

(1) (a) معادلة تفاضلية عادية .

(b) معادلة عادية .

(c) معادلة تفاضلية جزئية .

بند (2) :

(e) 1 (d) نعم

(c) نعم

(b) نعم

(1) (a) نعم

$$k = -2, 3 \quad (3)$$

بند (3) :

$$(1) \text{ نعم} \quad (c) \text{ نعم} \quad (e) \text{ لا}$$

بند (4) :

$$(1) \quad y = C e^{2x} \quad (3) \quad y = -\frac{1}{2} e^{2x} + e^{-x} + C \quad (1)$$

$$(5) \quad y = c x e^{x^2 - 1} \quad (7) \quad x = 2 \ln |y^3 + 3y + 2| + C$$

$$(1) \quad y = \frac{x}{e} \quad (3) \quad y^3 = 8 - \int_1^x e^{-t} dt \quad (11)$$

$$(5) \quad y = (1 - \pi + 2 \sin^{-1} x) \quad (7) \quad y = \tan(1 - \frac{1}{x})$$

بند (5) :

$$(1) \quad (a) \text{ لا} \quad (b) \text{ نعم ، الدرجة = صفرا} \quad (c) \text{ نعم ، الدرجة = -1}$$

$$(d) \text{ نعم ، الدرجة = صفرا} \quad (e) \text{ نعم ، الدرجة = صفرا}$$

(2)

$$(a) \quad y = x \sqrt{\frac{(13x^3 - 1)}{3}}$$

$$(b) \quad y = x e^{x^2} \quad (c) \quad y^2 = x^2 \sqrt{\frac{(c e^{x^3} - 1)}{4}}$$

بند (6) :

(1)

$$(1) \quad x^2 y + 2y^2 = C$$

$$(3) \quad \frac{x}{y} = \frac{y}{x} = C \quad (5) \quad \ln \left| \frac{y}{x} \right| + \frac{y}{x+y} = C$$

$$(7) \quad \ln|x| - \ln|y| + \ln(xy + \sqrt{1 + (xy)^2}) = C \quad (9) \quad y \ln x + x \ln y = C$$

$$(11) \quad \sin xy + \cos xy = C \quad (13) \quad x + \sec xy + x \tan xy = C$$

$$(15) \quad \tan^{-1} xy = C$$

$$(a) \quad r = -2$$

$$(c) \quad r \text{ كل قيم} \quad (11)$$

: (7) ہند

(I)

$$(a) y = 3 + ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$(c) y = \left[\frac{x^2}{2} + C \right] e^{2x}$$

$$(e) y = x^2 + \left(C - \frac{x^3}{3} \right) \ln|x|$$

(II)

$$(1) x^2 - \frac{1}{xy} = C, y = 0$$

$$(3) \frac{y^2}{2} + \tan^{-1} \frac{x}{y} = C$$

$$(5) \ln \left| \frac{x}{y} \right| - \frac{1}{xy} = C$$

$$(7) \tan^{-1} \frac{y}{x} - \frac{1}{2(x^2 + y^2)} = C$$

$$(9) \frac{x}{y^2} + xy = C, y = 0$$

$$(11) \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2 y^2}{2} = C$$

$$(13) \ln|y| + \frac{1}{(xy)^2} = C$$

$$(15) y = cx - x^2 \dots 1$$

: (8) ہند

$$(1) (x - y + 1)^3 = c(x + y - 3)$$

$$(3) (3x - y - 11)^3 = 11(x - y)^2 + c$$

$$(5) (x + 7)^2 y = -\frac{x^2}{3} - 5x^2 - 21x + c$$

$$(7) (y - 2x - 3)^2 = c(y - x - 2)$$

$$(9) 9x^2 - \frac{225}{16} + (4x + 5y - 5)^2 = c$$

: (9) ہند

$$(1) y = c_1 x^2 + c_2$$

$$(3) y = -\frac{x^2}{2} + c_1 e^x + c_2 x + c_3$$

$$(5) y = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$$

$$(7) c_1 y = \tan(c_1 x + c_2) \text{ and } y = c$$

$$(9) y = \tan(c_1 x + c_2)$$

الوحدة الثالثة

بند (1) :

- (1) خطية غير متجانسة
(3) غير خطية
(7) خطية متجانسة
(4) غير خطية

بند (2) :

$$(1) I.(e^{2x}) = 4x^2 e^{2x} + e^{2x}, \quad I.(\sin x) = -x^2 \sin x + \sin x$$

$$(3) y = e^{2x} - 2e^x$$

(4)

(a) حل وحيد على الفترة $(-\pi/2, \pi/2)$

(c) حل وحيد على الفترة $(0, 3)$

(c) حل وحيد على $(-\infty, 1)$

بند (3) :

$$(1) y = x - 1 + ce^x \quad (3) y = \frac{e^x}{2} + ce^x$$

$$(5) y = -3 \cos^2 x + c \cos x \quad (7) y = \lambda \int \frac{\cos x}{x} dx + c \lambda$$

$$(9) y = -\frac{1}{2} + ce^{x^2} \quad (11) y = \lambda e^{x^2} + \frac{e^x}{x} e^{x^2}$$

بند (4) :

$$(1) y = \left[\frac{2}{3} + ce^{x^2} \right]^{2/3}$$

$$(3) y = x(\ln|x| + c)^{-1} \quad (5) y = [2\lambda^m + c\lambda^m]^{-1/4}$$

$$(7) y' = 1 + ce^{x^2} \quad (9) y = \left[-\frac{2}{3} \ln|x| + c(\ln|x|)^{-1/2} \right]^{-1}$$

بند (5) :

$$(1) W = -\frac{1}{\lambda}$$

$$(3) W = e^{x \cos x}$$

(1)

(II)

$$(1) y_2 = xe^x \quad (3) y_2 = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(5) y_2 = -1 + \frac{x}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$

: (6) ١١

(I)

$$(1) xD^2 + (2+x^2)D + x, \\ -x \cos x + (2+x^2) \cos x + x \sin x$$

$$(5) xD^2 + (1-2x)D + (x-1), \\ x-1$$

(II)

$$(1) (D - \sqrt{2})(D + \sqrt{2})$$

$$(3) (D+1)^2(D+3)$$

$$(5) D(D-2)(D-3)(D+1)$$

(III)

$$(1) (D^2 + 5xD - c^2)y = 0$$

$$(2) (D^2 - x^2D + \sin x)y = 1$$

$$(3) (e^x D^2 + D + 1)y = x$$

الوحدة الرابعة

: (1) ١١

(I)

$$(1) y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$$

$$(3) y = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

$$(5) y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{2x} \quad (7) y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-3x}$$

$$(9) y = c^{3x} - e^{-2x} \quad (11) y = 2e^{-3x} + 6xe^{-3x}$$

(II)

$$(a) y'' - 2y' - 3y = 0$$

$$(b) y'' + 4y = 0$$

: (2) ٻڌ

(I)

$$(1) \quad y = c_1 e^x + c_2 x e^x \quad (3) \quad y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$$

$$(5) \quad y = c_1 e^{14x} + c_2 x e^{14x}$$

(II)

$$(1) \quad D^2 y = 0$$

$$(3) \quad (D-1)^2 y = 0$$

: (3) ٻڌ

(I)

$$(1) \quad y = c_1 \cos x/3 + c_2 \sin x/3$$

$$(3) \quad y = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x$$

$$(5) \quad y = c_1 e^{-x} \cos \sqrt{3} x + c_2 e^{-x} \sin \sqrt{3} x$$

(II)

$$(1) \quad y'' + y = 0$$

$$(3) \quad y'' + 4y' + 13y = 0$$

$$(5) \quad y'' - 6y' + 15y = 0$$

: (4) ٻڌ

(I)

$$(1) \quad y_x = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x$$

$$(3) \quad y_x = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + x - 1$$

$$(5) \quad y_x = c_1 e^{-x} \cos \sqrt{3} x + c_2 e^{-x} \sin \sqrt{3} x + \sin 2x$$

(II)

$$(1) \quad y_x = c_1 e^{x/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 e^{x/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x + 5 \cos x$$

$$(3) \quad y_x = c_1 e^{x/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 e^{x/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x + 4 \cos x + 6 e^{2x}$$

: (5) ہند

(I)

$$(1) y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + 3 + x$$

$$(3) y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x$$

$$(5) y = c_1 e^{-3x} \cos x + c_2 e^{-3x} \sin x - 2e^{-x} \cos x + 4e^{-x} \sin x$$

$$(7) y = c_1 e^{x/50} + c_2 e^{-x/50} - \frac{9}{50} \cos x - \frac{1}{10} x \sin x$$

$$(9) y = c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{3}{2} e^x + x^2 - 2x$$

(II)

$$(1) y_p = (c_1 + c_2 x)x^2 e^{2x} + (c_3 + c_4 x + c_5 x^2) \cos x + (c_6 + c_7 x + c_8 x^2) \sin x$$

$$(3) y_p = (c_1 x^2 + c_2 x) \sin x + (c_3 x^2 + c_4 x) \cos x + c_5 10^x$$

$$(5) y_p = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + c_3 x^2 + c_4 x + c_5$$

: (6) ہند

$$(1) y = (c_1 + \ln|\cos x|) \cos x + (c_2 + x) \sin x$$

$$(3) y = \frac{2x-1}{32} e^{2x} + (c_1 + c_2 x) e^{-2x}$$

$$(5) y = \frac{1}{4} e^{-x} (-x \sin x - 2 \cos x + c_1 + c_2 x)$$

$$(7) y = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x + \frac{x}{2} \sin 4x + \frac{1}{16} \cos 4x \ln|\cos 4x|$$

$$(9) y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \left[(\cos 2x) \ln|\operatorname{cosec} 2x + \cot 2x| - 1 \right] / 4$$

$$(11) y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \sin x \ln|\sec x + \tan x| - 2$$

$$(13) y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{4} (\cos 2x) \ln|\sec 2x + \tan 2x|$$

الوحدة الخامسة

بند (1) :

(1)

$$(1) \{-\infty, 0\}$$

$$(3) \{3\pi/2, 5\pi/2\}$$

$$(5) \{0, \infty\}$$

بند (2) :

(1)

$$(1) y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x}$$

$$(3) y = c_1 + (c_2 + c_3 x) e^{-3x}$$

$$(5) y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}$$

$$(7) y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + c_4 e^x$$

$$(9) y = (c_1 + c_2 x) \cos 3x + (c_3 + c_4 x) \sin 3x$$

$$(11) y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_4 e^{-x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x$$

$$(13) y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3) e^x$$

(1)

$$(1) D^2(D+1)^2 y = 0$$

$$(3) (D^2+1)^2 y = 0$$

بند (3) :

(1)

$$(1) y_p = \frac{3}{2} e^x + x^2 - 2x$$

$$(3) y_p = \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \quad (5) y_p = -\frac{1}{2} x e^{2x}$$

$$(7) y_p = \frac{1}{2} (x-1) e^x \quad (9) y_p = -2 + 2x + x e^x$$

(11)

$$(1) y_p = c_1 e^x + x^2 [(c_2 + c_3 x + c_4 x^2) \cos x + (c_5 + c_6 x + c_7 x^2) \sin x]$$

$$(3) y_p = x^2 [(c_1 + c_2 x) e^x + (c_3 + c_4 x) e^{-x} + (c_5 + c_6 x + c_7 x^2 + c_8 x^3) \cos x + (c_9 + c_{10} x + c_{11} x^2 + c_{12} x^3) \sin x]$$

: (4) ۛۛۛ

$$(1) y = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \right) e^x + c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x) e^x$$

$$(3) y = - \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} \right) + c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x}$$

$$(5) y = \frac{1}{25} (4 \cos x + 3 \sin x) + c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-3x}$$

$$(7) y = \frac{1}{2} \cos x + c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^x$$

$$(9) y = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - c_1 \right) e^x + c_2 + c_3 x + c_4 e^{-x}$$

: (5) ۛۛۛ

$$(1) y = c_1 x^2 + \frac{c_2}{x^3}$$

$$(3) y = c_1 x^{4/3} + c_2 x^{-4/3}$$

$$(5) y = c_1 x^3 \cos(4 \ln x) + c_2 x^3 \sin(4 \ln x)$$

$$(7) y = c_1 x + c_2 \sqrt{x}$$

$$(9) y = c_1 (x-1)^{-1} + c_2 (x-1)^{-1} \ln|x-1|$$

$$(11) y = c_1 (x-3) + c_2 (x-3) \ln|x-3| + c_3 (x-3)^{-1}$$

: (6) ۛۛۛ

(I)

$$(1) L = D^5 \quad (3) L = D + 7$$

$$(5) L = (D-2)(D-1) \quad (7) L = [(D+1)^2 + 4]^3$$

$$(9) L = (D+2)^2 [(D+5)^2 + 9]^2$$

(II)

$$(1) y_p = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3$$

$$(3) y_p = c_1 x e^{3x} + c_2 x^2 + c_3 x + c_4$$

$$(5) y_p = c_1 + c_2 x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$$

الوحدة السابعة

بند (1) :

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{s^2-1} & (13) & \frac{a}{s^2+a^2} \quad (11) \end{array} \quad \begin{array}{ll} (5) \text{ نعم} & (3) \text{ لا} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \frac{1}{s-1} & (9) \end{array}$$

بند (3) :

$$\frac{1}{(s-1)^2+1} \quad (3) \quad \frac{2}{s^2+4s} \quad (1)$$

بند (4) :

$$\begin{array}{ll} (1) \frac{2}{s^3} + \frac{2}{(s-1)^2+4} & (5) \frac{4}{(s+1)^3} - \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+16} \\ (3) \frac{s+1}{(s+1)^2+9} + \frac{1}{s-6} - \frac{1}{s} & (9) \frac{(s+3)\cos 4 - 2\sin 4}{(s+3)^2+4} \\ (7) \frac{s}{2(s^2+9)} - \frac{s}{2(s^2+49)} & (11) - \left[(s-2) \frac{d}{ds} \hat{f}(s-2) + \hat{f}(s-2) \right] \\ (13) \frac{2(s-2)}{s[(s-2)^2+1]} \hat{x} & \\ (15) \frac{s^3-16s^2+120s^2-400s+460}{5[(s-3)^2+1]^3} & \end{array}$$

بند (5) :

$$\begin{array}{lll} (1) 1-e^{-t} & (3) \frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^{-2t} - \frac{1}{2} t e^{-2t} & \\ (5) \frac{1}{5} e^{-2t} \sin 5t & (7) t \sin t & (9) \frac{3}{2} t \sin t + \frac{3}{2} t \cos t \\ (11) \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cosh \frac{t}{\sqrt{2}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}} - \sinh \frac{t}{\sqrt{2}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}} \right] & & \end{array}$$

$$(13) \frac{1}{t} [e^{2t} - e^{3t}]$$

بند (6) :

$$(1) y = (\sin t - \cos t + e^{-2t} [\sin t + \cos t]) / 8$$

$$(3) y = e^{-t} [\sin t + \cos t]$$

$$(5) y = [e^{2t} - 8e^{-t} + 7 - 6t + 2t^2] / 4$$

$$(7) y = \frac{1}{4} e^t - \frac{1}{4} e^{-t} - \frac{1}{4} t e^{-t}$$

$$(9) y = \frac{2}{3} e^{-t} \cos \sqrt{2} t + \frac{\sqrt{2}}{3} e^{-t} \sin \sqrt{2} t + t - \frac{2}{3}$$

بند (7) :

$$(1) \frac{(3s+2)e^{-\frac{1}{2}}}{2s^2} \quad (3) \frac{1-e^{-2s}}{s^2+1}$$

$$(5) \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} [1 - 4e^{-2s} + 4e^{-3s} - e^{-4s}]$$

$$(15) y = \begin{cases} 1 - e^{-t} & 0 \leq t \leq 1 \\ t e^{t-1} - e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$

بند (8) :

$$(1) \frac{e^a - e^b}{b-a} \quad (a \neq b) \quad , \quad t e^a \quad (a=b)$$

$$(3) t \quad (5) y = [4t^3 - 9t^2 + 24t - 18] / 6$$

$$(7) y = (4 - 7t + 4t^2) / e^{-t} \quad (9) y = t - \frac{t^2}{2}$$

$$(11) e^{2t} - e^t \quad (13) e^{2t/3} - e^{-t/2} + e^{t/6} \quad (15) \frac{e^t + \sin t - \cos t}{2}$$

الوحدة السابعة

بند (1) :

$$(1) -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^{n-1}$$

$$(5) 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2x^n$$

بند (2) :

$$(1) -1 + 2(x+1) - 3(x+1)^2 + 22 \frac{(x+1)^3}{6}$$

$$(3) 1 + x + x^2/2 + x^3/3$$

$$(5) 1 - (\sin 1) \frac{x^2}{2} + \frac{(\sin 2)x^4}{48}$$

$$(7) 1 + 2x + \frac{5x^3}{6} - \frac{x^4}{3}$$

بند (3) :

$$(1) \{1, -2, -3\} \quad (3) \{-8, 1\} \quad (5) \{-7\}$$

$$(7) -4, 4, -1, 0 \text{ نظامية } 1 \text{ غير نظامية.}$$

$$(9) \pm n\pi, -1, 0 \text{ نظامية } n \in \mathbb{N}, 0 \text{ غير نظامية.}$$

$$(11) -4, 4, -2, 0 \text{ غير نظامية.}$$

بند (4) :

$$(1) y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

$$(3) y = a_0 \left(1 - 2x^2 + \frac{x^4}{3} \right) + a_1 \left(x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)(-1) \cdots (2n-5)x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)$$

$$(5) y = a_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)x^{3n}}{(3n)!} \right) + a_1 \left(x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)x^{3n+1}}{(3n+1)!} \right)$$

$$(7) y = a_0 \left(1 - 3x^2 \right) + a_1 \left(x - \frac{x^3}{3} \right)$$

$$(9) y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n}}{3(n!)} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{1(1+3 \cdot 1) + \dots + (1+3n)}$$

$$(11) y = a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n! [2 \cdot 5 \dots (3n-1)]} \right] + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n+1)}$$

: (5) ٥

$$(1) s^2 - 3s - 1$$

$$(3) s^2 = 0$$

$$(5) s^2 = 0$$

$$(7) s^2 - 3s - 10 = 0$$

: (6) ٦

$$(1) y = a_0 \left[x^{2/3} - \frac{1}{2} x^{8/3} + \frac{5}{28} x^{14/3} - \frac{1}{21} x^{20/3} + \dots \right]$$

$$(3) y = a_0 \left[1 - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{64} x^4 - \frac{1}{2304} x^6 + \dots \right]$$

$$(5) y = a_0 \left[1 - \frac{1}{3} x^2 + \frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{60} x^4 + \dots \right]$$

$$(7) y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+3/2}}{(n+2)!}$$

$$(9) y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2^{2n} (n+1)! n!}$$

: (7) ٧

$$(1) y_1 = \sqrt{|x|} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

$$a_0 = 1, a_k = \frac{2}{k(2k+1)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{2j-15}{4^{k-j-1}} a_j, k \geq 1, 0 < |x| < 4$$

$$y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

$$a_0 = 1, a_k = \frac{1}{k(2k-1)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{j-8}{4^{k-j}} a_j, k \geq 1, |x| < 4$$

$$(3) \quad y_1 = |x|^5 \sum_0^{\infty} a_k x^k,$$

$$a_0 = 1, a_k = -\frac{(-1)^k}{4^{k+1} k(4k+5)} \sum_0^k (-1)^j 4^j (4j+7) a_j, \quad k \geq 1, \quad 0 < |x| < 4$$

$$y_2 = \sum_0^{\infty} a_k x^k,$$

$$a_0 = 1, a_k = -\frac{(-1)^k}{2^{2k+1} k(4k-5)} \sum_0^k (-1)^j 4^j (4j+7) a_j, \quad k \geq 1, \quad |x| < 4$$

$$(5) \quad y_1 = x, \quad y_2 = x^{-2} \sum_0^{\infty} a_k x^k,$$

$$a_0 = 1, a_k = -\frac{3k-8}{3k} a_{k-1}, \quad k \geq 1$$

$$(7) \quad y_1 = x, \quad y_2 = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! k} x^{k+1} + x \ln x$$

$$(9) \quad y_1 = x \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{(k!)^2} \right]$$

$$y_2 = 2x^{-1} \sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{\sum_{j=0}^k 1}{(k!)^2} x^k + x \left[1 + \sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{(k!)^2} \ln x \right]$$

$$(11) \quad v_1 = 4! \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{(k+4)!} x^{k+4} \right]$$

$$y_2 = 1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}x^2$$

الوحدة الثامنة

بند (2) :

$$(5) \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \end{pmatrix}$$

$$(7) \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

بند (3) :

$$(1) \quad y_1 = 5c^x, \quad y_2 = -5c^x$$

$$(3) \quad y_1 = 5c^x + u_1(x) \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6}c^{3x} - \frac{1}{2}c^{1-x} \right]$$

$$y_2 = -5c^x + u_1(x) \left[-\frac{2}{3} + \frac{1}{6}c^{3x} + \frac{1}{2}c^{1-x} \right]$$

$$(5) \quad y_1 = c^x(x - x^2), \quad y_2 = x^2c^x$$

بند (4) :

$$(1) \quad Y = \begin{pmatrix} c_1e^x + c_2e^{-x} \\ c_1e^x + 3c_2e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad Y = \begin{pmatrix} 7c_1e^{2x} + c_2e^{-x} \\ c_1e^{2x} + 3c_2e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$(5) \quad Y = \begin{pmatrix} -c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} \\ 4c_1e^x - c_2e^{2x} + 2c_3e^{3x} \\ c_1e^x - c_2e^{2x} + c_3e^{3x} \end{pmatrix}$$

بند (5) :

$$(1) Y = c_1 \begin{pmatrix} -e^x \sin x \\ e^x \cos x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^x \cos x \\ e^x \sin x \end{pmatrix}$$

$$(3) Y = c_1 \begin{pmatrix} e^x (-\cos x \sqrt{2} - \sqrt{2} \sin x \sqrt{2}) \\ 3e^x \cos x \sqrt{2} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^x (\sqrt{2} \cos x \sqrt{2} - \sin x \sqrt{2}) \\ 3e^x \sin x \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

: (7) ۱۱۱

$$(1) Y = c_1 \begin{pmatrix} e^{3x} (\cos 2x - \sin 2x) \\ 2e^{3x} \cos 2x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{3x} (\cos 2x + \sin 2x) \\ 2e^{3x} \sin 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^{3x} \end{pmatrix}$$

$$(3) Y = c_1 \begin{pmatrix} (1+4x)e^x \\ 4xe^x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4xe^x \\ (1-4x)e^x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+(\lambda+2)^2 e^x \\ 1+2\lambda^2 e^x \end{pmatrix}$$

$$(5) Y = c_1 \begin{pmatrix} 6e^{4x} \\ e^{4x} \\ e^{4x} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix}$$

الوحدة التاسعة

بند (1) :

$$(1) y^2 = cx \quad (3) y = x + 1 + ce^x$$

$$(5) x^2 + y^2 = c^2$$

$$(7) (a) x(t) = 600[1 - e^{-t/600}]$$

$$(b) t = 50 \ln 3$$

$$(9) x = 30 - 25/c^3$$

بند (2) :

$$(1) t = 5 \left[\ln \left(\frac{12}{52} \right) / \ln \left(\frac{35}{52} \right) \right] \approx 18.5$$

$$(3) 1019 \text{ ثانية}$$

بند (3) :

$$(1) 2, 4\pi/3, 2 \quad (3) y(0) = 2, y'(0) = 0, y(t) = 2(tx)/2$$

First Course In Differential Equation

Prof. Roshdi Khalil

دار المناهج
للشؤون التعليمية



للفاكس: ٤٦٥٠٦٢٤، ص.ب: ٢١٥٣٠٨
عمان ١١١٢٢ الأردن

Bibliotheca Alexandrina



0332693